



UNIVERSIDAD CARLOS III DE MADRID  
ESCUELA POLITÉCNICA SUPERIOR

Departamento de Mecánica de Medios Continuos y Teoría de  
Estructuras

INGENIERÍA INDUSTRIAL  
Proyecto Fin de Carrera

# Dinámica de vigas con amortiguamiento no local

Autor: Sergio González López

Tutor: Prof. Dr. D. José Fernández Sáez

Octubre de 2009

# Agradecimientos

Llega el final de esta etapa, y quería aprovechar este espacio para acordarme de todos los compañeros que he tenido a lo largo de estos años, tanto en Ingeniería Técnica como en Industrial y en el Máster. Se acaba una etapa y comienza otra que empezó hace un año: el Doctorado en Ingeniería Mecánica y Organización Industrial.

Me acuerdo de mi primer día de universidad. Ese día conocí a Leticia, Yaiza, Fabián, Óscar, Diego, Matías, Miguel,... La verdad es que no me costó nada integrarme, teniendo en cuenta que no conocía a nadie cuando llegué aquí. Unas semanas después conocí a Felipe y Pablo gracias a mi afición al ajedrez, ya que estaban ellos en un aula jugando y obviamente me acerqué a echar un vistazo. Al apostre Felipe ha sido uno de mis mejores amigos todo este tiempo, y lo sigue siendo en la actualidad. Ese año también conocí a Jesús, Raquel, Remo,... . Creo que fue el año más importante para mí en este sentido. Los dos años siguientes conocí a Lourdes, Dani, Laura,..., y más tarde fui conociendo poco a poco a gente con la que sigo teniendo contacto a día de hoy: Ana, Paula, Sebastián, Moisés, Sonia,...

El año que acabé Ingeniería Técnica y empecé Ingeniería Industrial, significó también un punto de inflexión para mí, ya que era un nuevo reto que empecé con todas las ganas del mundo. Ese año conocí a Irene y María, entre otros, mientras que seguía coincidiendo con muchos de mis primeros amigos de universidad. En mi segundo año en la carrera, decidí que me apetecía hacer el Máster en Mecánica Estructural Avanzada, ya que en ese momento tenía claro que quería hacer el Doctorado en el Departamento de Mecánica de Medios Continuos y Teoría de Estructuras. No me arrepiento de haber hecho Ingeniería Industrial y el Máster, ya que de esta manera he conseguido ampliar mis conocimientos en casi todos los campos de la Ingeniería Industrial en general.

En los últimos año de carrera he conocido a personas que la verdad es que no me esperaba que a estas alturas pudiera conocer. He conocido a muchísima gente, y me acuerdo ahora mismo de los dos Adrianes, Alfredo, Antonio, Ana, Valle, Isabel,... todos ellos compañeros de especialidad en Tecnologías Energéticas. También he conocido a Israel, Ramiro, Yoli,...

Por supuesto, doy gracias a mis padres y mi hermana por todo el apoyo que me han dado durante todos estos años de universidad, sin ese apoyo sé a ciencia cierta que no habría llegado hasta aquí, ya que he tenido momentos malos donde ellos me han levantado. Y por supuesto a Leticia, que ha sido mi principal apoyo durante este último año.

Para terminar, quiero acordarme de mis compañeros y amigos del Club de Ajedrez Alcorcón, que durante estos años hemos compartido juntos buenos momentos, y que va a seguir siendo así espero que por muchos años más.

Las matemáticas son el alfabeto con el cual Dios ha escrito el Universo  
(Galileo Galilei)

En matemáticas es inútil tratar de entender algo, sólo hay que usarlo  
(Johann von Neumann)

El ajedrez sirve, como pocas cosas en este mundo, para distraer y olvidar  
momentáneamente las preocupaciones de la vida diaria  
(GM J.R. Capablanca, excampeón Mundial)

La acumulación de pequeñas ventajas lleva a una supremacía considerable  
(W. Steinitz, excampeon Mundial)

# Índice general

<b>1. Introducción y objetivos</b>	<b>2</b>
1.1. Introducción . . . . .	2
1.2. Objetivos . . . . .	4
1.3. Antecedentes históricos . . . . .	5
<b>2. Introducción a la viscoelasticidad</b>	<b>7</b>
2.1. Concepto de viscoelasticidad . . . . .	7
2.2. Modelos viscoelásticos . . . . .	11
2.3. Integrales Hereditarias . . . . .	15
2.4. Principio de Correspondencia . . . . .	17
2.5. Influencia de la temperatura en la curva de fluencia (metales) . . . .	20
2.6. Ensayos de rotura por fluencia . . . . .	23
<b>3. Dinámica de vigas viscoelásticas</b>	<b>24</b>
3.1. Introducción a la dinámica de vigas . . . . .	24
3.2. Cálculo de vigas con amortiguamiento viscoelástico . . . . .	31
3.3. Cálculo de vigas de material viscoelástico . . . . .	33
3.3.1. Forma diferencial utilizando modelos mecánicos . . . . .	33
3.3.2. Forma de Integral Hereditaria . . . . .	34
<b>4. Vigas viscoelásticas con amortiguamiento no local</b>	<b>36</b>
4.1. Planteamiento del problema . . . . .	36
4.1.1. Formulación general . . . . .	36
4.1.2. Casos especiales de función de amortiguamiento . . . . .	39
4.1.3. Caso general de función de amortiguamiento: modelos . . . . .	40
4.2. Introducción a distintos métodos de resolución . . . . .	44
<b>5. Métodos de resolución de la ecuación de movimiento</b>	<b>46</b>
5.1. Método de Galerkin y Transformada de Laplace . . . . .	46
5.2. Método de semi-discretización temporal . . . . .	51
5.2.1. Desarrollo del método . . . . .	51
5.2.2. Análisis de la convergencia . . . . .	55
5.3. Método de aproximaciones sucesivas . . . . .	59
5.4. Introducción al método de descomposición en funciones <i>cnoidales</i> . .	61

<b>6. Casos prácticos</b>	<b>64</b>
6.1. Introducción y metodología de resolución . . . . .	64
6.2. Caso 1: condiciones de contorno apoyo-apoyo . . . . .	67
6.2.1. Modos propios no amortiguados . . . . .	67
6.2.2. Resolución del problema estándar . . . . .	67
6.2.3. Influencia de $N$ . . . . .	70
6.2.4. Solución analítica para $N=1$ . . . . .	71
6.2.5. Influencia del modelo utilizado en $c(x - \xi)$ . . . . .	73
6.2.6. Influencia de $H_0$ . . . . .	74
6.2.7. Influencia de $\mu$ . . . . .	75
6.2.8. Influencia de $\alpha$ . . . . .	76
6.2.9. Influencia de $x_2 - x_1$ (región centrada) . . . . .	77
6.2.10. Influencia de $x_1$ ( $\Delta x = L/2$ ) . . . . .	79
6.3. Caso 2: condiciones de contorno empotramiento-libre . . . . .	81
6.3.1. Modos propios no amortiguados . . . . .	81
6.3.2. Resolución del problema estándar . . . . .	82
6.3.3. Influencia de $N$ . . . . .	84
6.3.4. Influencia de $H_0$ . . . . .	84
6.3.5. Influencia de $\mu$ . . . . .	85
6.3.6. Influencia de $\alpha$ . . . . .	86
6.3.7. Influencia de $x_2 - x_1$ (región centrada) . . . . .	86
6.3.8. Influencia de $x_1$ ( $\Delta x = L/2$ ) . . . . .	87
6.4. Caso 3: condiciones de contorno empotramiento-apoyo . . . . .	90
6.4.1. Modos propios no amortiguados . . . . .	90
6.4.2. Resolución del problema estándar . . . . .	91
6.4.3. Influencia de $N$ . . . . .	93
6.4.4. Influencia de $H_0$ . . . . .	93
6.4.5. Influencia de $\mu$ . . . . .	95
6.4.6. Influencia de $\alpha$ . . . . .	95
6.4.7. Influencia de $x_2 - x_1$ (región centrada) . . . . .	96
6.4.8. Influencia de $x_1$ ( $\Delta x = L/2$ ) . . . . .	97
6.5. Caso 4: condiciones de contorno empotramiento-empotramiento . . . . .	99
6.5.1. Modos propios no amortiguados . . . . .	99
6.5.2. Resolución del problema estándar . . . . .	100
6.5.3. Influencia de $N$ . . . . .	101
6.5.4. Influencia de $H_0$ . . . . .	102
6.5.5. Influencia de $\mu$ . . . . .	103
6.5.6. Influencia de $\alpha$ . . . . .	104
6.5.7. Influencia de $x_2 - x_1$ (región centrada) . . . . .	105
6.5.8. Influencia de $x_1$ ( $\Delta x = L/2$ ) . . . . .	106
6.6. Comparativa de resultados . . . . .	108
<b>7. Conclusiones</b>	<b>112</b>

8. Líneas futuras de investigación	114
9. Bibliografía	115

# Índice de figuras

1.1. Tratamiento amortiguador de capa libre . . . . .	3
1.2. Tratamiento amortiguador a cortante . . . . .	3
2.1. Comportamiento de un sólido elástico perfecto . . . . .	7
2.2. Comportamiento de un líquido viscoso . . . . .	8
2.3. Ensayo de fluencia . . . . .	9
2.4. Ensayo de relajación . . . . .	10
2.5. Modelo de material elástico: $\sigma = K \cdot \epsilon$ . . . . .	11
2.6. Modelo de material viscoso: $\sigma = C \cdot \dot{\epsilon}$ . . . . .	11
2.7. Modelo de Maxwell: resorte y amortiguador en serie . . . . .	12
2.8. Modelo de Kelvin: resorte y amortiguador en paralelo . . . . .	13
2.9. Modelo analógico alternativo . . . . .	14
2.10. Función de fluencia . . . . .	15
2.11. Caso particular: salto finito en la tensión aplicada . . . . .	15
2.12. Caso general: tensión función del tiempo . . . . .	16
2.13. Viga biapoyada . . . . .	18
2.14. Influencia de la temperatura en la curva de fluencia . . . . .	20
2.15. Fluencia a altas temperaturas . . . . .	21
2.16. Rotura por fluencia: curva $P - \sigma$ . . . . .	23
3.1. Viga elemental sometida a una carga distribuida . . . . .	24
3.2. Equilibrio local en una sección genérica . . . . .	26
3.3. Viga con tratamiento amortiguador . . . . .	31
4.1. Modelo de función de Kernel: decrecimiento exponencial . . . . .	40
4.2. Modelo de función de Kernel: función error . . . . .	41
4.3. Modelo de función de Kernel: función escalón . . . . .	41
4.4. Modelo de función de Kernel: función triangular . . . . .	42
4.5. Modelo de función de relajación . . . . .	43
6.1. Ejemplo ilustrativo que justifica la definición de $\eta$ . . . . .	65
6.2. Desplazamiento del punto medio para la viga biapoyada estándar . . . . .	69
6.3. Contribución de los modos 2 a 5 al desplazamiento en $x = L/2$ . . . . .	70
6.4. Desplazamiento del punto medio para el modelo exponencial ( $\alpha = 5$ ) . . . . .	73
6.5. Desplazamiento del punto medio para el modelo función error ( $\alpha = 5$ ) . . . . .	74

6.6. Desplazamiento del punto medio para el modelo función escalón ( $l_0 = 0,8$ ) . . . . .	74
6.7. Desplazamiento del punto medio para el modelo función triangular ( $l_0 = 0,8$ ) . . . . .	75
6.8. Desplazamiento del punto medio para distintos valores de $H_0$ . . . . .	75
6.9. Capacidad de amortiguación $\eta$ en función de $H_0$ . . . . .	76
6.10. Desplazamiento del punto medio para distintos valores de $\mu$ . . . . .	76
6.11. Capacidad de amortiguación $\eta$ en función de $\mu$ . . . . .	77
6.12. Desplazamiento del punto medio para distintos valores de $\alpha$ . . . . .	77
6.13. Capacidad de amortiguación $\eta$ en función de $\alpha$ . . . . .	78
6.14. Desplazamiento del punto medio para distintos valores de $\Delta x$ (región centrada en $x = L/2$ ) . . . . .	78
6.15. Capacidad de amortiguación $\eta$ en función de $\Delta x$ (región centrada en $x = L/2$ ) . . . . .	79
6.16. Desplazamiento del punto medio para distintos valores de $x_1$ ( $\Delta x = L/2$ )	79
6.17. Capacidad de amortiguación $\eta$ en función de $x_1$ ( $\Delta x = L/2$ ) . . . . .	80
6.18. Desplazamiento del punto medio para la viga empotrada-libre estándar	83
6.19. Contribución de los modos 2 y 3 al desplazamiento en $x = L/2$ . . . . .	84
6.20. Desplazamiento del punto medio para distintos valores de $H_0$ . . . . .	85
6.21. Capacidad de amortiguación $\eta$ en función de $H_0$ . . . . .	85
6.22. Desplazamiento del punto medio para distintos valores de $\mu$ . . . . .	86
6.23. Capacidad de amortiguación $\eta$ en función de $\mu$ . . . . .	86
6.24. Desplazamiento del punto medio para distintos valores de $\alpha$ . . . . .	87
6.25. Capacidad de amortiguación $\eta$ en función de $\alpha$ . . . . .	87
6.26. Desplazamiento del punto medio para distintos valores de $\Delta x$ (región centrada en $x = L/2$ ) . . . . .	88
6.27. Capacidad de amortiguación $\eta$ en función de $\Delta x$ (región centrada en $x = L/2$ ) . . . . .	88
6.28. Desplazamiento del punto medio para distintos valores de $x_1$ ( $\Delta x = L/2$ )	89
6.29. Capacidad de amortiguación $\eta$ en función de $x_1$ ( $\Delta x = L/2$ ) . . . . .	89
6.30. Desplazamiento del punto medio para la viga empotrada-libre estándar	92
6.31. Contribución de los modos 2 a 4 al desplazamiento en $x = L/2$ . . . . .	93
6.32. Desplazamiento del punto medio para distintos valores de $H_0$ . . . . .	94
6.33. Capacidad de amortiguación $\eta$ en función de $H_0$ . . . . .	94
6.34. Desplazamiento del punto medio para distintos valores de $\mu$ . . . . .	95
6.35. Capacidad de amortiguación $\eta$ en función de $\mu$ . . . . .	95
6.36. Desplazamiento del punto medio para distintos valores de $\alpha$ . . . . .	96
6.37. Capacidad de amortiguación $\eta$ en función de $\alpha$ . . . . .	96
6.38. Desplazamiento del punto medio para distintos valores de $\Delta x$ (región centrada en $x = L/2$ ) . . . . .	97
6.39. Capacidad de amortiguación $\eta$ en función de $\Delta x$ (región centrada en $x = L/2$ ) . . . . .	97
6.40. Capacidad de amortiguación $\eta$ en función de $x_1$ ( $\Delta x = L/2$ ) . . . . .	98
6.41. Desplazamiento del punto medio para la viga empotrada-libre estándar	101



6.42. Contribución de los modos 2 y 3 al desplazamiento en $x = L/2$ . . . .	102
6.43. Desplazamiento del punto medio para distintos valores de $H_0$ . . . . .	102
6.44. Capacidad de amortiguación $\eta$ en función de $H_0$ . . . . .	103
6.45. Desplazamiento del punto medio para distintos valores de $\mu$ . . . . .	103
6.46. Capacidad de amortiguación $\eta$ en función de $\mu$ . . . . .	104
6.47. Desplazamiento del punto medio para distintos valores de $\alpha$ . . . . .	104
6.48. Capacidad de amortiguación $\eta$ en función de $\alpha$ . . . . .	105
6.49. Desplazamiento del punto medio para distintos valores de $\Delta x$ (región centrada en $x = L/2$ ) . . . . .	105
6.50. Capacidad de amortiguación $\eta$ en función de $\Delta x$ (región centrada en $x = L/2$ ) . . . . .	106
6.51. Desplazamiento del punto medio para distintos valores de $x_1$ ( $\Delta x = L/2$ )	106
6.52. Capacidad de amortiguación $\eta$ en función de $x_1$ ( $\Delta x = L/2$ ) . . . . .	107
6.53. Capacidad de amortiguación $\eta$ en función de $H_0$ (resto de parámetros: valores estándar) . . . . .	109
6.54. Capacidad de amortiguación $\eta$ en función de $\mu$ (resto de parámetros: valores estándar) . . . . .	109
6.55. Capacidad de amortiguación $\eta$ en función de $\alpha$ (resto de parámetros: valores estándar) . . . . .	110
6.56. Capacidad de amortiguación $\eta$ en función de $\Delta x$ (resto de parámetros: valores estándar) . . . . .	111
6.57. Capacidad de amortiguación $\eta$ en función de $x_1$ (resto de parámetros: valores estándar) . . . . .	111

# Capítulo 1

## Introducción y objetivos

### 1.1. Introducción

El análisis de la respuesta dinámica de estructuras es de vital importancia en numerosas áreas de la ingeniería mecánica, civil y aeroespacial, como por ejemplo los cables que soportan los puentes ó las vibraciones de las estructuras aeroespaciales. En particular, es de especial interés analizar el comportamiento de estructuras amortiguadas, así como los diferentes modelos de amortiguamiento que se pueden considerar.

Los materiales viscoelásticos, debido a sus características de amortiguamiento, son muy usados en ingeniería aeroespacial y mecánica para controlar las vibraciones en estructuras y máquinas, y en ingeniería acústica para reducir el ruido. Cuando estos materiales son sometidos a una deformación, una parte de este trabajo se almacena y puede ser recuperado como energía elástica de deformación mientras que la otra parte se disipa sin deformaciones inelásticas. El amortiguamiento viscoelástico se observa en muchos polímeros, ya que son materiales constituidos por cadenas moleculares grandes y por tanto mayor capacidad para disipar energía. La capacidad de amortiguamiento surge de la relajación y recuperación del polímero después de que éste haya sido deformado.

Los materiales amortiguadores se han usado mucho en ingeniería mecánica como un método para reducir las vibraciones inducidas por irregularidades del terreno, en un vehículo, motor, etc. En ingeniería aeronáutica y aeroespacial también han sido utilizados para disminuir las oscilaciones inducidas por la turbulencia, las vibraciones transmitidas desde las turbinas y motores de cohetes, etc. En ingeniería civil se han utilizado para aumentar el amortiguamiento intrínseco de las estructuras y así reducir las las oscilaciones inducidas por el viento, e incluso en las dos últimas décadas también se ha analizado y puesto en práctica su capacidad para mitigar la respuesta a cargas sísmicas.

Estos materiales ofrecen una alternativa a otras técnicas usadas en estructuras civiles, como por ejemplo los amortiguadores de fluido viscoso y los amortiguadores de fricción. Cuando se usan materiales viscoelásticos en edificios, se instalan en forma

de láminas pequeñas (comparadas con la dimensión de la estructura) que se colocan entre placas de acero. Estos amortiguadores viscoelásticos, junto con los de otros tipos antes mencionados, se conocen con el nombre genérico de sistemas de control pasivo, por el hecho de que no necesitan de ninguna fuente de energía externa para funcionar.

Existen diversos tipos de tratamiento amortiguador dependiendo de la configuración de las capas sobre el elemento. El más simple se conoce como tratamiento amortiguador "de capa libre" o "capa no restringida", y es el más fácil de aplicar y económico. En él, la disipación de energía surge de la deformación extensional que se presenta en la viga cuando es sometida a una carga cíclica (figura 1.1).

Otro tipo de tratamiento utilizado se conoce como "a cortante" o "de capa restringida", que consiste en formar un emparedado constituido por dos capas elásticas externas y una capa viscoelástica entre ellas (figura 1.2). Cuando las dos capas externas experimentan flexión cíclica deforman por cortante la capa viscolástica. La deformación por cortante es un mecanismo mediante el cual se disipa más energía que si la capa sólo tuviera deformaciones extensionales, lo cual permite que las oscilaciones estructurales se atenúen más rápidamente.

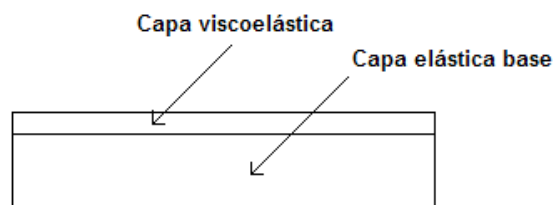


Figura 1.1: Tratamiento amortiguador de capa libre

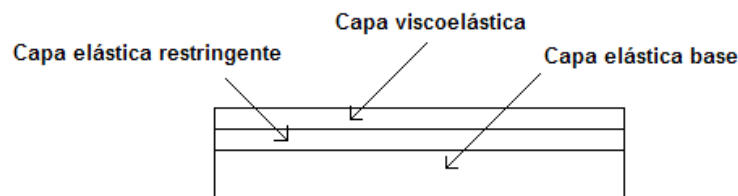


Figura 1.2: Tratamiento amortiguador a cortante

La mayor ventaja de utilizar tratamientos amortiguadores es la reducción en la respuesta dinámica lograda sin alterar significativamente la masa y rigidez de la estructura.

## 1.2. Objetivos

En este trabajo se va a estudiar de manera analítica el tratamiento de amortiguamiento "de capa libre" en vigas de material elástico recubierto con una capa de material viscoelástico amortiguador, partiendo de la ecuación de movimiento de la viga. Se considerarán geometrías de viga sencillas (rigidez y sección transversal constantes) y condiciones de contorno estándar (extremo libre, apoyado y empotrado).

El modelo que se va a analizar en el presente estudio es un **modelo de amortiguamiento viscoelástico no local**, que tiene en cuenta efectos de histéresis espacial y temporal a la hora de calcular los desplazamientos de los puntos de la viga. No sólo interviene la historia de desplazamientos por tratarse de un material viscoelástico, sino también influye el campo de velocidades de todos los puntos del dominio espacial correspondientes a la región amortiguada de la viga. Además, dicho modelo se podrá particularizar de manera sencilla a los casos de **amortiguamiento viscoso** y **viscoelástico local**.

La ecuación de movimiento de la viga es una ecuación integro-diferencial que será abordada desde el punto de vista de diferentes métodos de resolución. Entre los diferentes procedimientos destacan el **Método de Galerkin**, de **Transformada de Laplace**, y diversos **Métodos Numéricos** cuyos fundamentos se detallarán más adelante en su capítulo correspondiente. Finalmente se ilustrará a título informativo un método alternativo basado en la **Descomposición en funciones cnoidales**.

En los primeros capítulos se entrará de manera general en los fundamentos de los materiales viscoelásticos y las diferentes modelizaciones que existen sobre su comportamiento mecánico, y se introducirá la dinámica de vigas básica para entender y resolver el problema. Finalmente, será en los capítulos siguientes donde se explicará el caso de viga amortiguada y se desarrollarán los distintos métodos de resolución, para posteriormente analizar mediante ejemplos prácticos cómo influyen en la solución final las condiciones de contorno y los distintos parámetros que intervienen en el problema.

Hay que tener en cuenta que en los problemas de ingeniería no es siempre posible obtener soluciones matemáticas rigurosas, y sólo en determinados casos simples pueden obtenerse soluciones analíticas exactas. Cuando los problemas implican propiedades de materiales, distribución de cargas y condiciones de contorno complejas, es necesario introducir simplificaciones o idealizaciones para reducir el problema a una solución matemática que sea capaz de dar resultados aceptables desde el punto de vista de la seguridad.

Cualquier estudio analítico similar al que se realiza en el presente trabajo, debe **apoyarse** siempre que sea posible en sendos **análisis experimental** y de **simulación numérica**, ya que por sí mismo no representa una solución utilizable para fines de tipo ingenieriles. En este sentido, el objetivo de este estudio es únicamente de tipo analítico, aunque apoyado en algunos aspectos por estudios anteriores que ya han sido contrastados con experimentación y simulaciones por ordenador.

### 1.3. Antecedentes históricos

El tratamiento consistente en una capa de material viscoelástico adherida a la superficie de una estructura sometida a una carga cíclica fue estudiado por primera vez por **Oberts(1952)**, considerando una viga con una capa viscoelástica en una y en dos caras.

El primer análisis teórico serio en el campo de tratamientos de amortiguamiento fue realizado por **Ross et al. (1959)**, quienes desarrollaron la primera teoría para vigas tipo emparedado de tres capas con material viscoelástico en el núcleo. La teoría fue desarrollada basándose en la ecuación diferencial de cuarto orden para vibraciones por flexión de una viga uniforme, pero utilizando una rigidez a flexión compleja equivalente.

**DiTaranto (1965)** también contribuyó de manera importante al estudio de vigas laminadas de tres capas con material viscoelástico entre las dos capas elásticas, y con condiciones de contorno arbitrarias. Este investigador obtuvo una ecuación diferencial de movimiento de sexto orden para vibraciones libres, en términos de los desplazamientos longitudinales en la viga. Su aporte contribuyó a calcular las frecuencias naturales del sistema.

Recientemente se han propuesto y estudiado numerosos modelos de amortiguamiento. **Yang y Wu (1997)** han analizado sistemas unidimensionales distribuidos con amortiguamiento viscoso, calculando los modos de vibración del sistema. **Krenk (2004)** investigó el problema de autovalores asociado a cables o vigas con amortiguamiento viscoso en la frontera o en una posición intermedia. Más tarde, **Krenk y Hogsberg (2005)** analizaron la respuesta modal de un cable con amortiguadores transversales, modelizados con propiedades viscosas, viscoelásticas y viscosas no lineales.

Otros autores han extendido el modelo de amortiguamiento viscoso a no viscoso. **Adhikari (2000,2001)** y **Adhikari y Woodhouse (2001)** presentaron un estudio sistemático sobre el análisis e identificación de sistemas mecánicos amortiguados, centrándose en el amortiguamiento no viscoso de sistemas lineales. **Woodhouse (1998)** obtuvo expresiones aproximadas para las frecuencias propias de sistemas amortiguados, así como sus modos correspondientes. **Podlubny (1999)** y **Mainardi (1997)** han utilizado modelos constitutivos basados en teorías diferenciales, que reproducen el comportamiento de materiales viscoelásticos amortiguados.

**Bagley y Torvik (1983,1985)** presentaron una formulación de elementos finitos y soluciones cerradas en el dominio de Laplace para estructuras de vigas amortiguadas, y **Enelund y Josefson (1997)** aplicaron también un método de elementos finitos al análisis dinámico de estructuras con materiales viscoelásticos.

**Flugge (1975)**, en su libro "Viscoelasticity" escribió:

"La reacción  $q(x_1)$  en un punto  $x_1$ , por supuesto que no sólo depende del desplazamiento  $w(x_1)$  en ese punto, sino también del de sus puntos próximos  $x_2$ , con una influencia decreciente según aumenta la distancia  $|x_1 - x_2|$ ".

**Russell (1992)** fue el primero en proponer un modelo de amortiguamiento no local para el análisis de vibraciones en vigas de material compuesto con amortiguamiento interno, sin embargo **Eringen y Edelen (1972)** ya habían introducido un modelo de elasticidad no local que fue posteriormente estudiado por **Polizzotto (2001)** y **Pisno y Fuschi (2003)**. Basado en la teoría de elasticidad no local, **Ahmadi (1975)** fue el primero en sugerir un modelo de viscoelasticidad no local.

En 1991, **Banks e Inman** consideraron cuatro modelos diferentes de amortiguamiento en vigas de material compuesto, denominados amortiguamiento viscoso del aire, amortiguamiento de Kelvin-Voigt, y amortiguamientos con histéresis espacial y temporal, y en 2005 **Lei, Friswell y Adhikari** proponen un método de Galerkin para sistemas distribuidos (vigas y placas) con amortiguamiento no local, resolviendo los casos particulares de amortiguamiento viscoso y viscoelástico.

# Capítulo 2

## Introducción a la viscoelasticidad

### 2.1. Concepto de viscoelasticidad

La teoría clásica de la elasticidad considera propiedades mecánicas de los **sólidos elásticos** de acuerdo con las leyes de Hooke generalizadas. Para un caso unidimensional de tracción simple, la deformación conseguida es directamente proporcional al esfuerzo aplicado (figura 2.1):

$$\sigma = f(\epsilon) \quad (2.1)$$

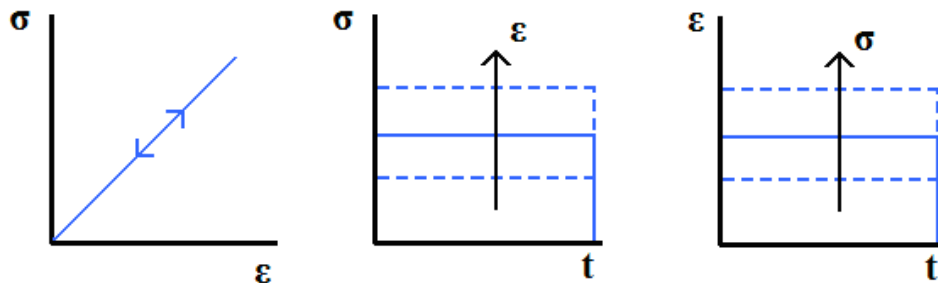


Figura 2.1: Comportamiento de un sólido elástico perfecto

Por otra parte, la teoría hidrodinámica trata las propiedades de los **líquidos viscosos** para los que, de acuerdo con la ley de Newton, el esfuerzo aplicado es directamente proporcional a la velocidad de deformación, pero independiente de la deformación misma (figura 2.2):

$$\sigma = f(\dot{\epsilon}) \quad (2.2)$$

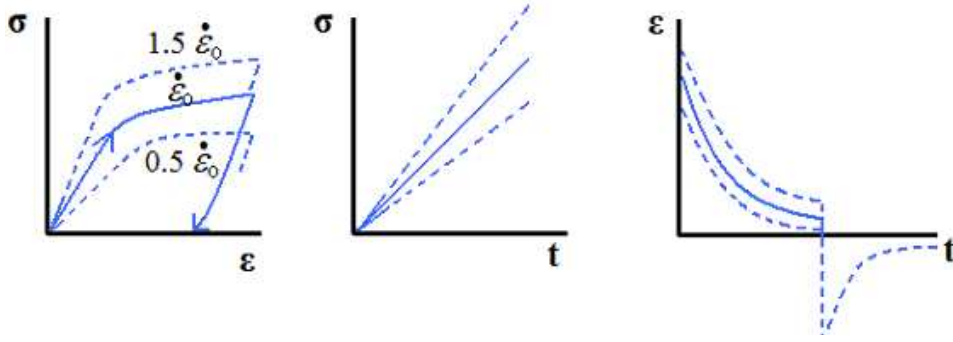


Figura 2.2: Comportamiento de un líquido viscoso

Estas dos categorías son idealizaciones, aunque el comportamiento de muchos sólidos se aproxima a las leyes de Hooke en infinitesimales deformaciones y el de muchos líquidos se aproxima a la ley de Newton para velocidades de deformación bajas.

De esta forma, si se aplica un estado de cargas sobre un sólido elástico, éste se deforma hasta que la fuerza cesa y la deformación vuelve a su valor inicial, es decir, poseen la cualidad de almacenamiento de energía mecánica sin disipación de la misma. Por otra parte, si un fluido viscoso se ve sometido a un estado tensional no hidrostático, disipa toda la energía sin posibilidad alguna de almacenamiento.

Un comportamiento intermedio es el **comportamiento viscoelástico**, mediante el cual se almacena sólo una parte del trabajo consumido en deformar, que puede ser recuperado al descargar. Son materiales capaces de almacenar y disipar energía mecánica.

$$\sigma = f(\epsilon, \dot{\epsilon}) \quad (2.3)$$

Un parámetro utilizado para caracterizar o clasificar de forma cualitativa las sustancias de acuerdo a su comportamiento elástico/viscoso/viscoelástico es el *número de Deborah*,  $De$ , que se define como:

$$De = \frac{\tau}{t} \quad (2.4)$$

donde  $\tau$  es un tiempo de relajación característico (nulo para un fluido viscoso e infinito para un material perfectamente elástico) y  $t$  es un tiempo característico del proceso de deformación al que se ve sometido el material. De esta forma se realiza la siguiente clasificación:

$De \ll 1$ : Comportamiento viscoso

$De \approx 1$ : Comportamiento viscoelástico

$De \gg 1$ : Comportamiento elástico



Según este parámetro, todas las sustancias pueden fluir si se espera el tiempo suficiente. De esta forma, un material puede comportarse como un sólido de Hooke si se tiene un tiempo de relajación muy grande o si es sometido a un proceso de deformación en un tiempo muy bajo. Para deformaciones bajas dentro de la zona viscoelástica, casi cercanas al equilibrio, existe una relación lineal entre esfuerzo y deformación, encontrando una zona de viscosidad lineal.

Un ejemplo claro de material viscoelástico son la mayoría de los polímeros. Entre los polímeros de mayor consumo destacan el PS ( $\tau \approx 1s$ ), PET (2s), LDPE (6s) ó PVC (30s), que teniendo en cuenta que durante su procesado la deformación es impuesta hasta que adoptan la forma deseada en tiempos de orden de varios segundos o minutos, proporciona a números de Deborah de orden unidad, lo cual supondría en muchos casos un comportamiento marcadamente viscoelástico. Otros ejemplos de material viscoelástico son los metales a alta temperatura, el hormigón, y el suelo sometido a acciones dinámicas.

Para caracterizar este tipo de materiales se utilizan los ensayos de fluencia y relajación a tracción o compresión simple, entre otros.

#### Ensayo de fluencia

Consiste en someter a una probeta a una tensión constante  $\sigma_0$  de tracción, y medir cómo evoluciona la deformación en función del tiempo,  $\epsilon_0(t)$  (figura 2.3).

Se define como **Función de Fluencia,  $J(t)$** , al valor de la deformación en función del tiempo en un ensayo de fluencia para una tensión constante unitaria, o lo que es lo mismo, para un ensayo a tensión constante  $\sigma_0$ :

$$J(t) = \frac{\epsilon(t)}{\sigma_0} \quad (2.5)$$

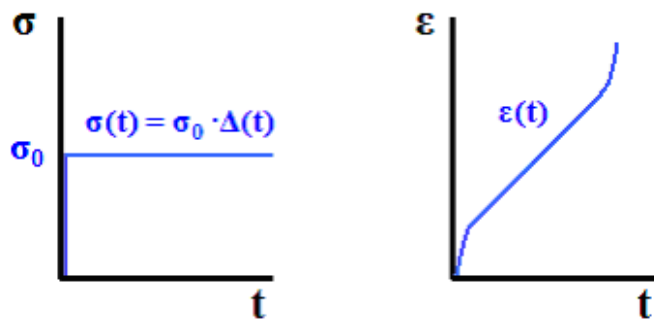


Figura 2.3: Ensayo de fluencia

## Ensayo de relajación

Este ensayo consiste en someter a una probeta a una deformación constante  $\epsilon_0$  de tracción, y medir cómo evoluciona la tensión en función del tiempo,  $\sigma_0(t)$  (figura 2.4)

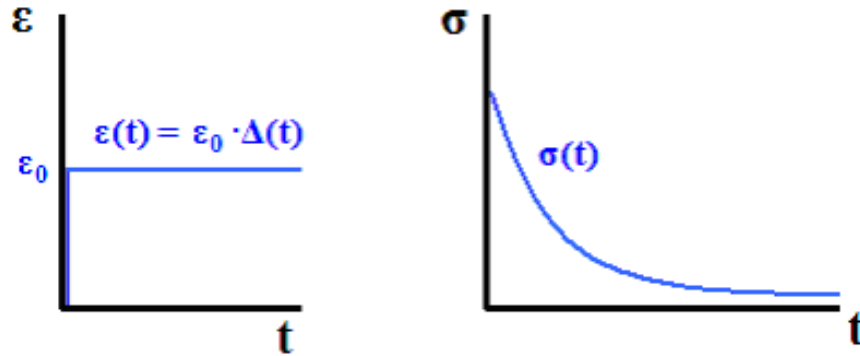


Figura 2.4: Ensayo de relajación

Se define como **Módulo de Relajación**,  $Y(t)$ , al valor de la tensión en función del tiempo en un ensayo de relajación para una deformación constante unitaria, o lo que es lo mismo, para un ensayo a deformación constante  $\epsilon_0$ :

$$Y(t) = \frac{\sigma(t)}{\epsilon_0} \quad (2.6)$$

## 2.2. Modelos viscoelásticos

Debido a que el comportamiento de los materiales viscoelásticos es difícil de visualizar, a menudo se suelen emplear modelos mecánicos para su representación.

Para construir un modelo que describa el comportamiento de este tipo de materiales, es necesario primeramente modelizar de manera sencilla un sólido de Hooke perfectamente elástico y un fluido de Newton. Para ello, partimos de las ecuaciones básicas de estos dos tipos de sólido, que son:

$$\sigma = K \epsilon : \text{Material elástico}$$

$$\sigma = C \dot{\epsilon} : \text{Fluido viscoso (Ley de Newton: } \tau = \mu \dot{\gamma})$$

Que responden a las ecuaciones cinemáticas de un resorte y un amortiguador:

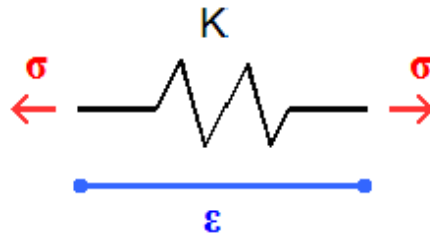


Figura 2.5: Modelo de material elástico:  $\sigma = K \cdot \epsilon$

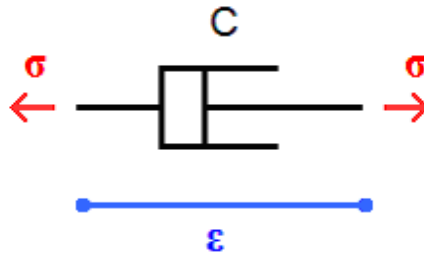


Figura 2.6: Modelo de material viscoso:  $\sigma = C \cdot \dot{\epsilon}$

De esta forma, el comportamiento de muchos cuerpos viscoelásticos podría ser modelizado adecuadamente mediante una combinación de resortes y amortiguadores, consiguiendo así buenos ajustes de datos experimentales. Entre los modelos más utilizados destacan los **modelos de Maxwell** y **Kelvin**, que utilizan un resorte y un amortiguador en serie y en paralelo respectivamente. A continuación mostramos el planteamiento de cada uno de ellos.

### Modelo de Maxwell

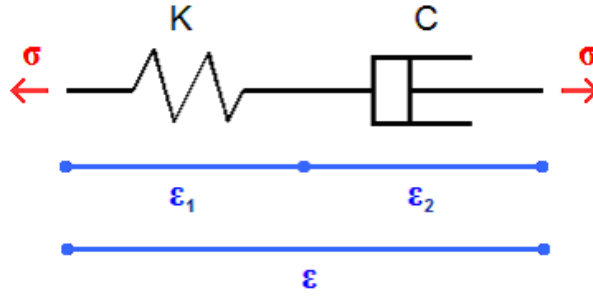


Figura 2.7: Modelo de Maxwell: resorte y amortiguador en serie

Partiendo de las ecuaciones del resorte y amortiguador, se puede llegar a una ecuación que relacione tensión y deformación para la combinación de un resorte y amortiguador en serie (figura 2.7):

$$\sigma = K \epsilon_1 \quad (2.7)$$

$$\sigma = C \dot{\epsilon}_2 \quad (2.8)$$

y utilizando  $\epsilon = \epsilon_1 + \epsilon_2$ , se obtiene finalmente una ecuación diferencial de primer orden que relaciona la tensión con la deformación de la siguiente manera:

$$\sigma + \frac{C}{K} \dot{\sigma} = C \dot{\epsilon} \quad (2.9)$$

Si se aplica Transformada de Laplace a la ecuación anterior:

$$\boxed{\frac{\bar{\sigma}}{\bar{\epsilon}} = \frac{C s}{1 + \frac{C}{K} s}} \quad (2.10)$$

donde  $\overline{(\cdot)}$  denota la Transformada de Laplace de  $(\cdot)$ .

### Modelo de Kelvin

Partiendo de las ecuaciones del resorte y amortiguador, se relacionan tensión y deformación para una combinación de resorte y amortiguador en serie (figura 2.8):

$$\sigma_1 = K \epsilon \quad (2.11)$$

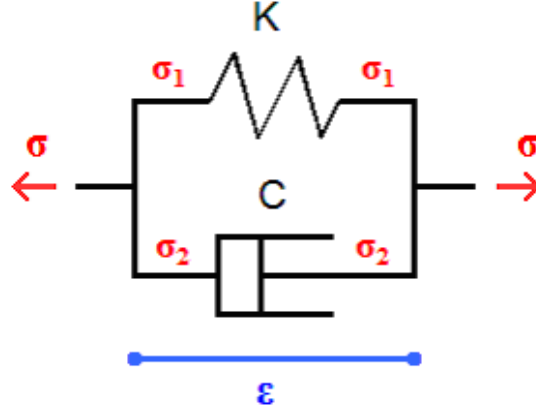


Figura 2.8: Modelo de Kelvin: resorte y amortiguador en paralelo

$$\sigma_2 = C \dot{\epsilon} \quad (2.12)$$

y utilizando  $\sigma = \sigma_1 + \sigma_2$ , se llega a:

$$\sigma = K \epsilon + C \dot{\epsilon} \quad (2.13)$$

o lo que es lo mismo:

$$\boxed{\frac{\bar{\sigma}}{\bar{\epsilon}} = K + C s} \quad (2.14)$$

#### Otros modelos de resortes y amortiguadores

Se pueden definir de igual manera otras combinaciones en serie y paralelo de resortes y amortiguadores, que modelen el comportamiento viscoelástico de un sólido.

En tales casos se llegará a una ecuación diferencial que podrá expresarse de manera general mediante la siguiente expresión:

$$\frac{\bar{\sigma}}{\bar{\epsilon}} = \frac{Q(s)}{P(s)} = \frac{\sum_{k=0}^n (q_k s^k)}{\sum_{k=0}^m (p_k s^k)} \quad (2.15)$$

Se puede aplicar a esta expresión general las definiciones de  $J(t)$  y  $Y(t)$  a través de un ensayo de fluencia y de relajación respectivamente, como sigue:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma(t) = 1 \cdot \Delta(t) \\ \epsilon(t) = J(t) \end{array} \right\} \Rightarrow \boxed{\bar{J}(s) = \frac{P(s)}{s \cdot Q(s)}} \quad (2.16)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \epsilon(t) = 1 \cdot \Delta(t) \\ \sigma(t) = Y(t) \end{array} \right\} \Rightarrow \boxed{\bar{Y}(s) = \frac{Q(s)}{s \cdot P(s)}} \quad (2.17)$$

siendo  $\Delta(t)$  la *función escalón* ó *función de Heavyside*. De esta forma se obtienen ambas funciones para el modelo utilizado en cada caso.

Combinando ambos resultados se llega a la interesante conclusión:

$$\boxed{\bar{J}(s) \bar{Y}(s) = \frac{1}{s^2}} \quad (2.18)$$

que relaciona la Función de Fluencia con el Módulo de Relajación de un material viscoelástico.

#### Otros modelos analógicos

De igual forma que se utilizaban los modelos de resorte y amortiguador, se pueden definir nuevos componentes "mecánicos" que intenten reproducir de la manera más exacta posible el comportamiento del material.

Un ejemplo de componente utilizado es el mostrado en la figura 2.9, que tiene por relación tensión-deformación la siguiente expresión:

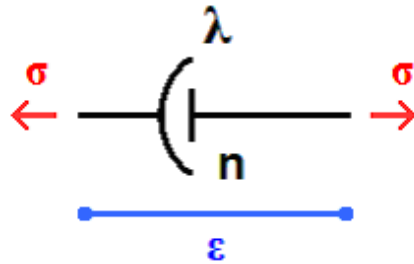


Figura 2.9: Modelo analógico alternativo

$$\sigma = \lambda (\dot{\epsilon})^{\frac{1}{n}} \quad (2.19)$$

## 2.3. Integrales Hereditarias

Hasta ahora se ha analizado el caso de un material viscoelástico sometido a una tensión constante de tracción. Se ha desarrollado una expresión que permite obtener la deformación en función del tiempo por medio de modelos de resortes y amortiguadores, previo cálculo de la Función de Fluencia (figura 2.10).

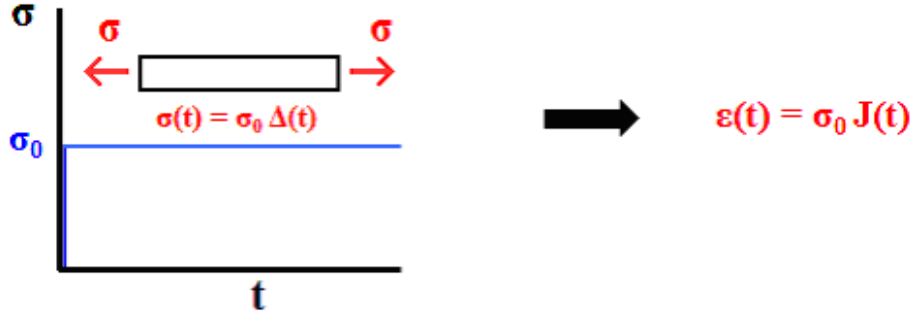


Figura 2.10: Función de fluencia

Puesto que los materiales que se han analizado hasta el momento siguen leyes lineales, se puede utilizar el Principio de Superposición para considerar el caso general de tensión no constante, esto es,  $\sigma(t)$  variable en el tiempo.

Primeramente considérese el caso de un salto finito en la tensión aplicada (figura 2.11).

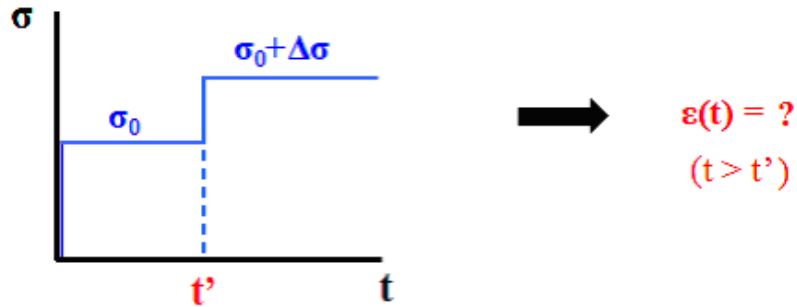


Figura 2.11: Caso particular: salto finito en la tensión aplicada

Para  $t > t'$  se tiene por tanto:

$$\epsilon(t) = \sigma_0 J(t) + \Delta\sigma J(t - t') \quad (2.20)$$

Se podrá por tanto calcular la deformación para un caso de tensión función del tiempo considerando a la función  $\sigma(t)$  como una sucesión de infinitos saltos de altura diferencial, esto es:

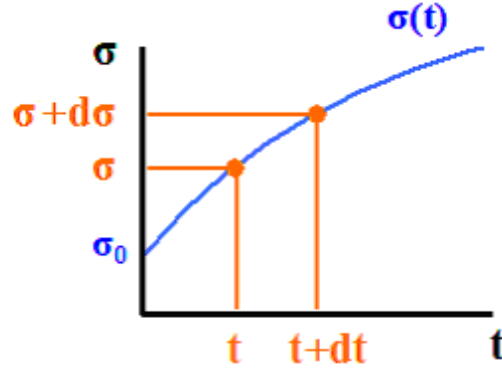


Figura 2.12: Caso general: tensión función del tiempo

$$\epsilon(t) = \sigma_0 J(t) + \int_0^t J(t-t') \dot{\sigma}(t') dt' \quad (2.21)$$

La integral que aparece en la expresión anterior recibe el nombre de **Integral Hereditaria**.

De manera totalmente análoga se puede realizar el cálculo para un estado de deformación genérico preestablecido, y obtener la tensión asociada:

$$\sigma(t) = \epsilon_0 Y(t) + \int_0^t Y(t-t') \dot{\epsilon}(t') dt' \quad (2.22)$$



## 2.4. Principio de Correspondencia

Dada una tipología estructural, el material que la forma, y un conjunto de cargas aplicadas, tanto si el material es elástico como si es viscoelástico se tienen que verificar las ecuaciones de equilibrio interno, de compatibilidad y las ecuaciones constitutivas correspondientes. Para ilustrar este Principio, se particularizará el caso de carga uniaxial por simplicidad.

Sea una viga sobre la que se aplican varias cargas  $P_i$  ( $i = 1, 2, \dots$ ). Aparecerán por tanto unas tensiones  $\sigma(x, y, z)$  que van a satisfacer las ecuaciones de equilibrio interno. Las deformaciones producidas serán a su vez  $\epsilon(x, y, z) = \sigma(x, y, z)/E$  si el material es elástico.

Se plantea a continuación el caso de material viscoelástico, ¿qué tensiones y deformaciones estará soportando la viga? Supongamos que se aplican las mismas cargas que en el caso elástico, esto es,  $P_i(t) = P_i \cdot \Delta(t)$ . Las tensiones serán las mismas que en el caso elástico, ya que de nuevo se deben satisfacer las ecuaciones de equilibrio:

$$\sigma(x, y, z, t) = \sigma^*(x, y, z, t) \Delta(t) \quad (2.23)$$

donde  $\sigma^*(x, y, z, t)$  es el campo tensional para el caso elástico correspondiente.

Para que se satisfagan las ecuaciones de equilibrio interno, las condiciones de contorno y las ecuaciones constitutivas, las deformaciones resultan en este caso:

$$\epsilon(x, y, z, t) = \sigma^*(x, y, z, t) J(t) \quad (2.24)$$

Supongamos ahora que se imponen a la viga ciertos desplazamientos  $w_i$  en algunos de sus puntos. En el caso elástico, las deformaciones  $\epsilon(x, y, z)$  pueden calcularse a partir de esos desplazamientos utilizando las ecuaciones de compatibilidad, y las tensiones  $\sigma(x, y, z)$  utilizando después las ecuaciones constitutivas. En el caso de material viscoelástico, se tiene:

$$\epsilon(x, y, z, t) = \epsilon^*(x, y, z, t) \Delta(t) \quad (2.25)$$

$$\sigma(x, y, z, t) = \epsilon^*(x, y, z, t) Y(t) \quad (2.26)$$

donde  $\epsilon^*(x, y, z, t)$  es la deformación para el caso elástico correspondiente. En ambos casos, la Función de Fluencia y el Módulo de Relajación,  $J(t)$  e  $Y(t)$  respectivamente, vendrán impuestos por el tipo de material viscoelástico, y variarán de un tipo a otro.

Ejemplo: viga biapoyada con desplazamiento impuesto en la sección central

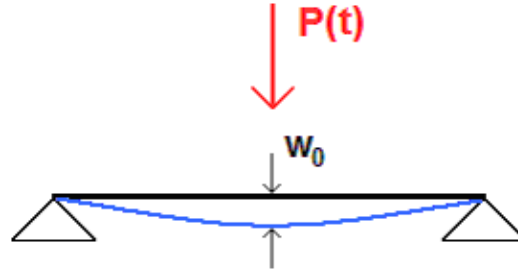


Figura 2.13: Viga biapoyada

Para conseguir un desplazamiento impuesto  $w_0$  en  $x = L/2$ , es necesaria una carga  $P(t)$ , variable en el tiempo debido a la viscoelasticidad del material.

Si el material fuese elástico, se tendría (bajo la hipótesis de pequeñas deformaciones):

$$P = \frac{48EI}{L^3} w_0 \quad (2.27)$$

Para un material viscoelástico, la expresión resultante se obtiene sustituyendo el módulo de elasticidad  $E$  por el módulo de relajación  $Y(t)$ :

$$P(t) = \frac{48 Y(t) I}{L^3} w_0 \quad (2.28)$$

#### Aplicación a las integrales hereditarias

Se puede combinar el Principio de Correspondencia con el concepto de Integral Hereditaria para el caso general de carga variable en el tiempo sobre una viga viscoelástica. Se ilustra a continuación con un ejemplo práctico.

Supongamos que tenemos una viga viscoelástica biapoyada sometida a una carga distribuida  $q_0$  a lo largo de toda su longitud. Para el caso de viga elástica se puede determinar fácilmente su deformada:

$$w^*(x) = \frac{16w_0}{5L^4} (x^4 - 2Lx^3 + L^3x) \quad (2.29)$$

siendo:

$$w_0 = \frac{5q_0L^4}{348EI} = w(x = \frac{L}{2}) \quad (2.30)$$

Para el caso de viga viscoelástica sometida a una carga  $q(t) = q_0 \cdot f(t)$  , la deformada variará con el tiempo a través de la siguiente expresión:

$$w(x, t) = w^*(x) \left[ f(0^+) J(t) + \int_{0^+}^t J(t - t') \dot{f}(t - t') dt' \right] \quad (2.31)$$

## 2.5. Influencia de la temperatura en la curva de fluencia (metales)

Hasta el momento no se ha tenido en cuenta ninguna influencia de la Temperatura en los procesos de fluencia y relajación, no obstante, su valor afecta a la Función de Fluencia y al Módulo de Relajación del material considerado.

Bajo este contexto, se distinguen dos regiones de comportamiento claramente diferenciadas. La primera de ellas es la zona de *fluencia a bajas temperaturas*, para valores de temperaturas menores que el 40 % del valor de la temperatura de fusión del material, valor próximo a la temperatura de recrystalización. La segunda zona que se analiza es la que corresponde a temperaturas entorno a ese valor, y es la denominada zona de *fluencia a altas temperaturas*.

Supongamos que se realiza un ensayo de fluencia a una tensión constante  $\sigma_0$ . Se comprueba experimentalmente que a mayores temperaturas se registran mayores deformaciones en el material.

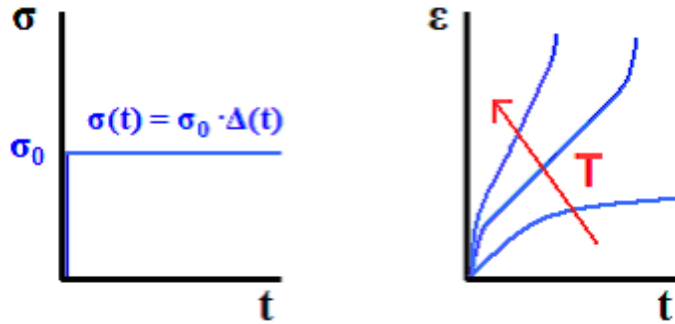


Figura 2.14: Influencia de la temperatura en la curva de fluencia

### Fluencia a bajas temperaturas ( $T < 0,4 T_{fusion}$ )

La curva deformación-tiempo correspondiente a un ensayo de fluencia sigue una expresión de tipo logarítmico (**Fluencia Logarítmica**):

$$\epsilon = A \ln(\nu t) \approx A \ln(\nu t + 1) \quad (2.32)$$

siendo  $A$  y  $\nu$  parámetros que dependen del material, la tensión, y la temperatura.

### Fluencia a altas temperaturas ( $T \sim 0,4 T_{fusion}$ )

Cuando se trabaja a temperaturas de este orden, aparece la denominada **Fluencia de Andrade**, produciéndose deformaciones que pueden llegar a ser muy elevadas. En la figura 2.15 se muestra esquemáticamente la curva deformación-tiempo correspondiente, para una tensión y temperatura constantes.

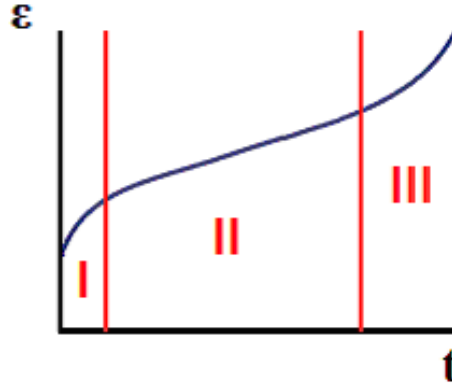


Figura 2.15: Fluencia a altas temperaturas

En ella se observan tres regiones claramente diferenciadas:

**Región I:** Fluencia transitoria. La deformación crece con el tiempo, pero la velocidad de deformación es siempre decreciente.

**Región II:** Fluencia estacionaria. La deformación crece linealmente con el tiempo, es decir, la velocidad de deformación es constante.

**Región III:** Fluencia acelerada. La deformación y velocidad de deformación crecen con el tiempo hasta la rotura de la probeta.

Aunque no existe una ley que caracterice el comportamiento completo esquematizado en la curva, Andrade en 1910 realizó una serie de ensayos de fluencia en metales a altas temperaturas y estableció una ecuación que describe con bastante aproximación el comportamiento en las regiones I y II.

En estas regiones la deformación para temperatura y tensión constante se puede escribir mediante la expresión:

$$\epsilon = \epsilon_0 + B t^n + K t \quad (2.33)$$

siendo los dos últimos sumandos la deformación correspondiente a las zonas I y II respectivamente, y donde:

$\epsilon_0$  es la deformación instantánea (tanto elástica como plástica si la hubiera), y  $B$  y  $K$  son constantes que dependen del material, la tensión y la temperatura.  $n$  es otra

constante del material que oscila entre  $1/4$  y  $2/3$ . Andrade en sus trabajos originales le asignó un valor de  $1/3$ .

La ecuación de Andrade no predice correctamente el comportamiento en la región III, donde aparecen fenómenos de crecimiento de microvacíos que dan lugar a la estricción del material si éste es dúctil o microfisuras si es frágil.

La constante  $K$  correspondiente al tramo de fluencia estacionaria, puede representarse a su vez a través de la siguiente expresión:

$$K = K_0 \exp\left(-\frac{Q}{RT}\right) \quad (2.34)$$

donde:

$$K_0 = C_0 \sigma^N \quad (2.35)$$

siendo  $C_0$  y  $N$  constantes ( $N = 3$  para la mayoría de las aleaciones,  $N \sim 4,5 \div 5,5$  para metales puros) que se determinan mediante experimentación.

El parámetro  $Q$  es la energía de activación de fluencia, que se puede considerar independiente de la tensión para valores de ésta por debajo de  $0,001 G$ , siendo  $G$  el módulo de cortadura del material,  $R$  la constante universal de los gases ideales,  $R = 8,314 J/mol K$ , y  $T$  la temperatura.

## 2.6. Ensayos de rotura por fluencia

En este tipo de ensayos, generalmente realizados a tensión y temperatura constantes, no se mide la evolución de la deformación, sino que se mide el tiempo que transcurre hasta la rotura del componente.

La familia de curvas que se genera en este tipo de ensayos se puede agrupar en una sola curva, que relaciona la tensión  $\sigma$  con un parámetro que engloba la influencia combinada de temperatura y tiempo. En este sentido, el parámetro más utilizado es el **parámetro de Larson-Miller**,  $P$ , introducido en 1952:

$$P = T (\log t_{rot} + C) \quad (2.36)$$

siendo  $T$  la temperatura,  $t_{rot}$  el tiempo hasta rotura y  $C$  una constante.

De esta forma se pueden extrapolar valores de rotura por fluencia de materiales (figura 2.16).

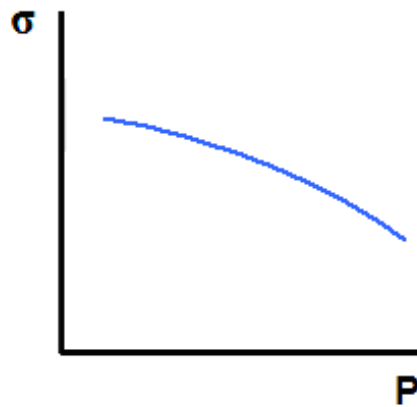


Figura 2.16: Rotura por fluencia: curva  $P - \sigma$

## Capítulo 3

# Dinámica de vigas viscoelásticas

### 3.1. Introducción a la dinámica de vigas

En este capítulo se estudia el comportamiento dinámico de vigas tipo Euler-Bernoulli con cargas que actúan en la dirección transversal a la misma (figura 3.1). Inicialmente, y de manera introductoria, se realizan los cálculos sin tener en cuenta ningún tipo de amortiguamiento a lo largo de la longitud de la viga. Como es habitual, se realiza la hipótesis de pequeñas deformaciones.

Sea una viga de longitud  $L$ , sección transversal  $A(x)$  y momento de inercia  $I(x)$ , sometida a una carga distribuida por unidad de longitud  $F(x,t)$  a lo largo de su dirección longitudinal. La densidad del material es  $\rho$  y su módulo de elasticidad  $E$ . El objetivo final de este análisis es determinar los movimientos de todos los puntos de la viga en función del tiempo, esto es, obtener una expresión para el desplazamiento transversal  $w(x,t)$ , ya que son nulos los desplazamientos longitudinales al no existir fuerzas en esta dirección. Para simplificar las expresiones obtenidas, se supondrán propiedades y dimensiones uniformes a lo largo de la longitud de la viga.

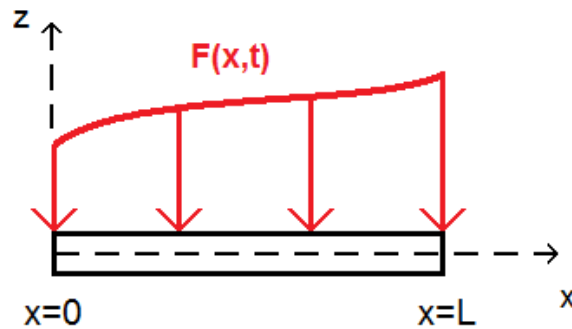


Figura 3.1: Viga elemental sometida a una carga distribuida

Los extremos de la viga ( $x = 0$ ,  $x = L$ ) estarán sujetos a unas determinadas condiciones de contorno, típicamente alguna de las que se muestran a continuación:



### Extremo empotrado:

Esta condición de contorno considera el desplazamiento ( $w$ ) y el giro ( $\theta = \partial w / \partial x$ ) nulos en el extremo  $x_0$  en el que es aplicada, lo que se traduce en las siguientes dos expresiones diferenciales:

$$\left\{ \begin{array}{l} w(x_0, t) = 0, \forall t \\ \frac{\partial w}{\partial x}(x_0, t) = 0, \forall t \end{array} \right\} \quad (3.1)$$

### Extremo apoyado:

En este caso son nulos el desplazamiento ( $w$ ) y el momento flector ( $M = -EI \partial^2 w / \partial x^2$ ) en el punto considerado:

$$\left\{ \begin{array}{l} w(x_0, t) = 0, \forall t \\ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(x_0, t) = 0, \forall t \end{array} \right\} \quad (3.2)$$

### Extremo libre:

Para esta condición de contorno se anulan el momento flector ( $M$ ) y el esfuerzo cortante ( $V = \partial M / \partial x$ ), lo que implica inmediatamente que son nulas las derivadas segunda y tercera del desplazamiento:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(x_0, t) = 0, \forall t \\ \frac{\partial}{\partial x} \left( EI(x) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) = 0, \forall t \end{array} \right\} \quad (3.3)$$

Además, como ocurre en cualquier problema dinámico, se partirá de unas determinadas condiciones iniciales de desplazamiento y velocidad en el instante inicial  $t = 0$  que habrá que considerar a la hora de resolver el problema:

$$\left\{ \begin{array}{l} w(x, 0) = f(x) \\ \frac{\partial w}{\partial t}(x, 0) = g(x) \end{array} \right\} \quad (3.4)$$

siendo habitual no obstante considerar desplazamientos y velocidades iniciales nulos en este tipo de problemas estructurales.

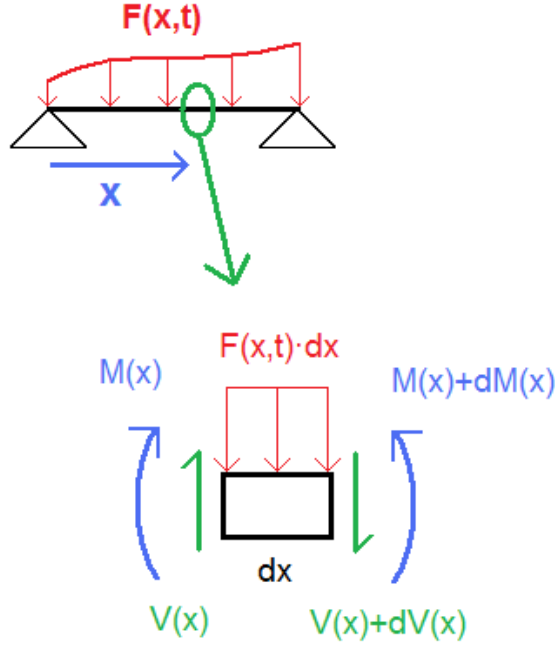


Figura 3.2: Equilibrio local en una sección genérica

Primeramente se van a establecer las características dinámicas de un segmento de viga de tamaño diferencial " $dx$ ", donde jugarán un papel fundamental las fuerzas inerciales (figura 3.2).

Sabemos que:

$$M = -EI(x) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad (3.5)$$

Aplicando la 2ª Ley de Newton al elemento diferencial anterior, e introduciendo la ecuación 3.5, se obtiene fácilmente la ecuación de movimiento de la viga:

$$\boxed{\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( EI(x) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) + \rho A(x) \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = F(x, t)} \quad (3.6)$$

Es apropiado advertir en este punto que es habitual despreciar el peso propio de este tipo de estructuras, ya que es mucho menor que las demás fuerzas que intervienen en el sistema, o lo que es lo mismo, los desplazamientos producidos son prácticamente inapreciables y se desprecian. No obstante, resulta sencillo incorporar este término a la ecuación diferencial, sumando la fuerza másica por unidad de longitud,  $\rho A(x)g$ , en el término independiente de la ecuación diferencial anterior, donde  $g$  es la aceleración de la gravedad,  $g = 9,81 \text{ N/kg}$ .

La solución general de la ecuación 3.6 será la suma de la solución general de la ecuación homogénea (problema de vibraciones libres,  $F(x, t) \equiv 0$ ) más una solución

particular de la ecuación completa (problema de vibraciones forzadas), expresiones que en muchos casos se obtienen de manera independiente.

### Problema de vibraciones libres

Para resolver la ecuación diferencial correspondiente al problema de vibraciones libres (también denominado problema homogéneo),  $F(x, t) \equiv 0$ , es típico utilizar el método de separación de variables, o también denominado método de Galerkin, que de manera sencilla permite obtener una solución como suma de funciones compuestas a su vez por otras funciones espaciales y temporales. Por simplicidad, se considerarán en los cálculos sucesivos propiedades uniformes a lo largo de la viga, es decir,  $\rho A(x) = \rho A$ ,  $EI(x) = EI$ .

Si se denota por  $w_h(x, t)$  al desplazamiento obtenido del problema de vibraciones libres, una solución en forma de variables separadas se puede definir por medio de la siguiente expresión:

$$w_h(x, t) = \sum_{i=1}^{\infty} \phi_i(x) q_i^h(t) \quad (3.7)$$

siendo  $\phi_i$  y  $q_i^h$  unas funciones espaciales y temporales que habrá que determinar. Sustituyendo 3.7 en la ecuación diferencial 3.6 con  $F \equiv 0$ , se obtiene la siguiente ecuación:

$$EI \sum_{i=1}^{\infty} (\phi_i^{IV}(x) q_i^h(t)) + \rho A \sum_{i=1}^{\infty} (\phi_i(x) \ddot{q}_i^h(t)) = 0 \quad (3.8)$$

que debe cumplirse de manera independiente para cada sumando *i-ésimo*. Se llega por tanto a la siguiente relación

$$\frac{EI \phi_i^{IV}(x)}{\rho A \phi_i(x)} = -\frac{\ddot{q}_i^h(t)}{q_i^h(t)} = cte_i \equiv \omega_i^2 \quad (3.9)$$

de donde resultan 2 ecuaciones diferenciales fáciles de resolver, una para la componente espacial  $\phi_i(x)$  y otra para la componente temporal  $q_i^h(t)$ , y para las cuales habrá que tener en cuenta las condiciones iniciales y de contorno del problema general.

$$\frac{EI}{\rho A} \phi_i^{IV}(x) - \omega_i^2 \phi_i(x) = 0 \quad (3.10)$$

$$\ddot{q}_i^h(t) + \omega_i^2 q_i^h(t) = 0 \quad (3.11)$$

Resolviendo ambas se obtiene:

$$\boxed{\phi_i(x) = A_i \cos \eta_i x + B_i \sin \eta_i x + C_i \cosh \eta_i x + D_i \sinh \eta_i x} \quad ; \quad \eta_i^4 \equiv \frac{\rho A}{EI} \omega_i^2 \quad (3.12)$$

$$\boxed{q_i^h(t) = \frac{\dot{q}_i^h(0)}{\omega_i} \sin \omega_i t + q_i^h(0) \cos \omega_i t} \quad (3.13)$$

$$\dot{q}_i^h(0) = \frac{\int_0^L \phi_i(x) \dot{w}(x, 0) dx}{\int_0^L \phi_i^2(x) dx} \quad (3.14)$$

$$q_i^h(0) = \frac{\int_0^L \phi_i(x) w(x, 0) dx}{\int_0^L \phi_i^2(x) dx} \quad (3.15)$$

donde las constantes  $A_i$ ,  $B_i$ ,  $C_i$ ,  $D_i$ , y  $\omega_i$  se obtienen de aplicar las condiciones de contorno a  $\phi_i(x)$  y de imponer que exista al menos una solución no trivial distinta de cero, quedando siempre una de estas constantes con un valor libre (se puede comprobar que este hecho no impide obtener una la solución final cerrada de  $w_h(x, t)$ ). Las funciones  $\phi_i(x)$  reciben el nombre de **modos propios de vibración**, y los parámetros  $\omega_i$  se denominan **frecuencias propias** del problema, y es de vital importancia conocer sus valores para comprender el movimiento transversal de la viga. Además, es interesante conocer la propiedad de **ortogonalidad** de los modos propios, que será de gran utilidad a la hora de resolver el problema amortiguado, y que se traduce en las siguientes expresiones:

$$\int_0^L \rho A \phi_i(x) \phi_j(x) dx = 0 \quad , \quad \forall i \neq j \quad (3.16)$$

$$\int_0^L EI \phi_i''(x) \phi_j''(x) dx = 0 \quad , \quad \forall i \neq j \quad (3.17)$$

Es habitual normalizar los modos propios fijando un valor de la constante libre, de tal manera que se cumpla la siguiente expresión:

$$\int_0^L \rho A \phi_k^2(x) dx = 1 \quad , \quad \forall k = 1, 2, \dots \quad (3.18)$$

que a su vez asegura (por la relación entre  $\eta_j$  y  $\omega_j$ ) la siguiente igualdad:

$$\int_0^L EI (\phi_k''(x))^2 dx = \omega_k^2 \quad , \quad \forall k = 1, 2, \dots \quad (3.19)$$

Por ejemplo, para una viga biapoyada, las frecuencias y modos propios resultan:

$$\phi_i(x) = C \sin \frac{i\pi x}{L} \quad (3.20)$$

$$\omega_i = \left( \frac{i\pi}{L} \right)^2 \sqrt{\frac{EI}{\rho A}} \quad (3.21)$$

El valor de  $C$  que normaliza los modos propios se obtiene de introducir 3.20 en 3.18:

$$\int_0^L \rho A \phi_k^2 dx = 1 \rightarrow C = \sqrt{\frac{2}{\rho A L}} \quad (3.22)$$

#### Problema de vibraciones forzadas: solución particular

A continuación se calcula la solución particular  $w_p(x, t)$  para la ecuación no homogénea correspondiente a  $F(x, t) \neq 0$ , para lo cual se descompone la función desplazamiento de nuevo en forma de variables separadas, donde van a aparecer los modos propios  $\phi_i$  que ya han sido calculados previamente en el problema de vibraciones libres asociado. Al mismo tiempo, se descompone también el término  $F(x, t)$  también en forma de serie de los modos propios, quedando:

$$\left\{ \begin{array}{l} \boxed{w_p(x, t) = \sum_{i=1}^{\infty} \phi_i(x) q_i^p(t)} \\ F(x, t) = \sum_{i=1}^{\infty} \phi_i(x) f_i(t) \end{array} \right\} \rightarrow \ddot{q}_i^p(t) + \omega_i^2 q_i^p(t) = \frac{f_i(t)}{\rho A} \quad (3.23)$$

donde las funciones  $f_i(t)$  se pueden obtener aplicando la ortogonalidad de los modos propios:

$$f_i(t) = \frac{\int_0^L F(x, t) \phi_i(x) dx}{\int_0^L \phi_i^2(x) dx} \quad (3.24)$$

Finalmente se obtiene como solución particular de  $q_i^p(t)$  la siguiente expresión:

$$\boxed{q_i^p(t) = \frac{1}{\rho A \omega_i} \int_0^t f_i(\tau) \sin \omega_i(t - \tau) d\tau} \quad (3.25)$$

### Problema de vibraciones forzadas: solución general

Una vez resuelto el problema homogéneo y encontrada una solución particular del problema no homogéneo, la solución general del problema de vibraciones forzadas se obtendrá sumando ambas soluciones obtenidas:

$$\boxed{w(x, t) = w_h(x, t) + w_p(x, t)} \quad (3.26)$$

Se puede comprobar que para las condiciones iniciales típicas de este tipo de problemas, esto es, desplazamiento y velocidad nulos en toda la viga en el instante inicial  $t = 0$ , la solución general del problema de vibraciones libres es nula,  $w_h(x, t) \equiv 0$ .

## 3.2. Cálculo de vigas con amortiguamiento viscoelástico

Una vez que se ha expuesto la dinámica de vigas sin ningún tipo de amortiguamiento, se va a plantear en esta sección de manera superficial cómo afecta la existencia del mismo a la hora de calcular los desplazamientos de una viga con las mismas propiedades mecánicas y características geométricas que las consideradas en el apartado anterior. Posteriormente, será en el siguiente capítulo donde se discutirán los distintos parámetros y funciones que intervienen en dicho problema y se detallará su resolución.

Supongamos que la viga de longitud  $L$  posee un tratamiento viscoelástico amortiguador en una región  $[x_1, x_2] \in [0, L]$  conocida (figura 3.3).

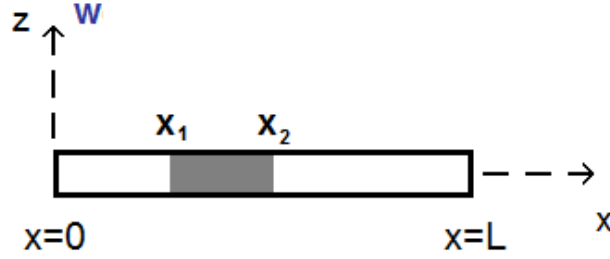


Figura 3.3: Viga con tratamiento amortiguador

Para este problema, la ecuación de movimiento tendrá, además de los sumandos de la ecuación 3.6, un nuevo término (al que denominaremos de forma genérica  $\Psi(x, t)$ ) que va a contener los efectos amortiguadores correspondientes. La ecuación de movimiento queda de la siguiente manera:

$$EI \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \rho A \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \underline{\underline{\Psi(x, t)}} = F(x, t) \quad (3.27)$$

A partir de este momento, el primer objetivo será determinar una expresión para  $\Psi(x, t)$  que se ajuste al comportamiento real de la viga amortiguada, y una vez introducido en la ecuación de movimiento aplicar un método de resolución que permita determinar los desplazamientos transversales  $w(x, t)$ , ya sea de forma analítica exacta o de manera numérica aproximada en caso de que la anterior no sea posible de abordar.

La función  $\Psi(x, t)$  será no nula únicamente en el tramo amortiguado de la viga, es decir,  $\Psi(x, t) \equiv 0$  en  $x \in [0, L] \setminus [x_1, x_2]$ , por tanto claramente dependerá de los puntos  $x_1$  y  $x_2$  que limitan la región con tratamiento amortiguador.

Una expresión de  $\Psi(x, t)$  muy utilizada en ingeniería en problemas diversos es la ecuación de un amortiguador viscoso, que ya se utilizó en los modelos de un material viscoelástico en el Capítulo 2:

$$\Psi(x, t) = k \frac{\partial w(x, t)}{\partial t} \quad , \quad x_1 \leq x \leq x_2 \quad (3.28)$$

En la práctica, se ha encontrado que la expresión 3.27 proporciona resultados cercanos a los reales, aunque con errores apreciables.

Un modelo de amortiguamiento más general considera que la fuerza  $\Psi$  en un punto  $x$  de la viga no sólo depende de la velocidad instantánea local en el punto considerado, sino también de la historia de velocidades de los puntos próximos al actual. A este respecto, se enuncia una expresión general para el término de amortiguamiento (ecuación 3.29).

$$\Psi(x, t) = k \int_{x_1}^{x_2} \int_0^t c(x - \xi) g(t - \tau) \frac{\partial w(\xi, \tau)}{\partial \tau} d\tau d\xi \quad (3.29)$$

donde  $c(x - \xi)$  y  $g(t - \tau)$  son funciones que aceptan a su vez diferentes modelizaciones, entre las que destacan las siguientes:

$$c(x - \xi) = \frac{\alpha}{2} e^{-\alpha|x-\xi|} \quad , \quad g(t - \tau) = \mu e^{-\mu(t-\tau)} \quad (3.30)$$

La ecuación 3.29 posee una integral espacial que recoge la naturaleza no local del amortiguamiento por medio de la función peso  $c(x - \xi)$ , que tiene un valor máximo cuando el punto de influencia  $\xi$  coincide con el punto que se quiere calcular,  $x$ , y que decrece según aumenta la distancia  $|x - \xi|$ . En cambio, la integral temporal recoge la historia de velocidades en instantes anteriores a  $t$ , a través del peso  $g(t - \tau)$  que es máximo cuando el instante de influencia es el actual ( $\tau = t$ ), y que decrece para instantes de influencia lejanos ( $t - \tau \uparrow$ ).

El hecho de que en el nuevo término  $\Psi(x, t)$  aparezca la influencia de dos intervalos continuos  $[x_1, x_2]$  y  $[0, t]$  a través de sendas integrales, dificulta el proceso de obtención de la solución exacta de la ecuación integro-diferencial a la que hemos llegado. A la hora de resolver el campo de desplazamientos  $w(x, t)$ , también hay que tener en cuenta la inclusión de esta variable en el término de amortiguamiento, lo que complica aún más su cálculo. En los siguientes capítulos se analizarán distintos métodos de resolución y se introducirán nuevos modelos alternativos para los pesos  $c(x - \xi)$  y  $g(t - \tau)$ , así como se considerarán de manera independiente dos efectos amortiguadores, interno y externo.



### 3.3. Cálculo de vigas de material viscoelástico

En esta sección se plantea el análisis dinámico de una viga fabricada íntegramente de material viscoelástico. A diferencia del apartado anterior, en este caso toda la viga sigue un comportamiento viscoelástico, y no sólo una región específica de la superficie de la misma. No se resolverá la ecuación de movimiento por no ser un objetivo del presente estudio, no obstante, los métodos que plantearemos en los siguientes capítulos pueden ser aplicados a este problema de manera similar y con resultados finales satisfactorios.

#### 3.3.1. Forma diferencial utilizando modelos mecánicos

Aceptando un estado de flexión pura en régimen de pequeñas deformaciones se puede relacionar la deformación en un punto de la viga con el desplazamiento vertical del mismo:

$$\epsilon(x, t) = -y \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad (3.31)$$

siendo  $y$  la distancia del punto considerado al eje neutro de la viga. Asimismo, para verificarse la expresión anterior, se ha supuesto que una sección de la viga originalmente plana y perpendicular al eje neutro se mantiene plana y perpendicular bajo un estado de deformaciones, esto es, se considera a la viga de tipo Euler-Bernoulli.

Como se desarrolló en el Capítulo 2, se puede plantear un modelo mecánico para predecir el comportamiento del material, es decir:

$$\underline{P}(\sigma) = \underline{Q}(\epsilon) \quad (3.32)$$

siendo  $\underline{P}$  y  $\underline{Q}$  los siguientes operadores diferenciales:

$$\underline{P}(\cdot) = \sum_{k=0}^m p_k \frac{\partial^k(\cdot)}{\partial t^k} \quad , \quad \underline{Q}(\cdot) = \sum_{k=0}^n p_k \frac{\partial^k(\cdot)}{\partial t^k} \quad (3.33)$$

si se multiplica la ecuación 3.32 por la distancia al eje neutro,  $y$ , y se integra a lo largo de la sección de la viga,  $A$ :

$$\int_A y \underline{P}(\sigma) dA = \int_A y \underline{Q}(\epsilon) dA \quad (3.34)$$

Operando ambos lados de la expresión, y utilizando que  $\partial^2 w / \partial x^2$  es constante en cada sección  $A$  (no depende de  $y$  ni de  $z$ ):

$$\int_A y \underline{P}(\sigma) dA = -\underline{P} \left( \int_A -\sigma y dA \right) = -\underline{P}(M) \quad (3.35)$$

$$\int_A y \underline{Q}(\epsilon) dA = \underline{Q} \left( \int_A \epsilon y dA \right) = -\underline{Q} \left( \int_A y^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} dA \right) = -\underline{Q} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \int_A y^2 dA = -I \cdot \underline{Q} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \quad (3.36)$$

Se ha llegado a la siguiente expresión:

$$\underline{P}(M) = I \cdot \underline{Q} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \quad (3.37)$$

donde  $M$  es el momento flector e  $I$  el momento de inercia.

Si se sustituye la ecuación anterior en la ecuación de movimiento de la viga, ecuación 3.6, y se utiliza que  $\partial^2 M / \partial x^2 = F(x, t) - \rho A \ddot{w}(x, t)$ , resulta:

$$\boxed{\underline{P}(F(x, t) - \rho A \ddot{w}(x, t)) = I \underline{Q}(w^{IV}(x, t))} \quad (3.38)$$

que representa la ecuación de movimiento de la viga viscoelástica que se está analizando, que junto con las correspondientes condiciones iniciales y de contorno, proporciona el desplazamiento en función del tiempo en todos los puntos de la misma.

### 3.3.2. Forma de Integral Hereditaria

En el Capítulo 2 se describía el comportamiento de los materiales viscoelásticos a través de la función de fluencia,  $J(t)$ , y el módulo de relajación,  $Y(t)$ , funciones que reproducen de manera unívoca el comportamiento viscoelástico frente a solicitaciones variables con el tiempo en su forma más general. Se obtuvo una expresión que relacionaba la tensión con la deformación a través del módulo de relajación:

$$\sigma(x, t) = \epsilon_0(x, 0) Y(t) + \int_0^t Y(t - \tau) \dot{\epsilon}(x, \tau) d\tau \quad (3.39)$$

Multiplicando la ecuación anterior por la distancia al eje neutro,  $y$ , e integrando en una sección genérica, se obtiene:

$$M(x, t) = I Y(t) w^{IV}(x, 0) + I \int_0^t Y(t - \tau) \dot{w}''(x, \tau) d\tau \quad (3.40)$$

De nuevo utilizando que  $M''(x, t) = F(x, t) - \rho A \ddot{w}(x, t)$ , y añadiendo la relación  $V(x, t) = M'(x, t)$ , se llega finalmente a:

$$\boxed{\rho A \ddot{w}(x, t) + I Y(t) w^{IV}(x, 0) + I \int_0^t Y(t - \tau) \dot{w}^{IV}(x, \tau) d\tau = F(x, t)} \quad (3.41)$$

Que aplicando integración por partes conduce a la siguiente ecuación totalmente equivalente:

$$\boxed{\rho A \ddot{w}(x, t) + I Y(0) w^{IV}(x, t) - I \int_0^t \dot{Y}(t - \tau) w^{IV}(x, \tau) d\tau = F(x, t)} \quad (3.42)$$

Las ecuaciones anteriores proporcionan el desplazamiento transversal de una viga con propiedades viscoelásticas isótropas sometida a una carga distribuida variable en el tiempo. Además, será necesario especificar el desplazamiento y velocidad iniciales en todos los puntos de la misma.

# Capítulo 4

## Vigas viscoelásticas con amortiguamiento no local

### 4.1. Planteamiento del problema

#### 4.1.1. Formulación general

Sea una viga de longitud  $L$ , masa por unidad de longitud  $\rho A(x)$ , y rigidez a flexión  $EI(x)$ , sometida a una fuerza distribuida por unidad de longitud  $F(x, t)$ , junto con unas determinadas condiciones iniciales y de contorno en sus extremos. El problema consiste en calcular el campo de desplazamientos  $w(x, t)$  en los puntos de la viga, considerando un modelo de amortiguamiento viscoelástico no local.

La ecuación de movimiento para un sistema dinámico y continuo con amortiguamiento lineal se puede expresar de forma general a través de la siguiente expresión:

$$\rho A(x) \ddot{w}(x, t) + (L_e + L_i) \dot{w}(x, t) + L_k w(x, t) = F(x, t) \quad (4.1)$$

donde:

$L_e$  y  $L_i$  son dos operadores de amortiguamiento externo e interno, respectivamente  $L_k$  es un operador espacial

Como se puede observar, ambos amortiguamientos se tratan de manera independiente, ya que el amortiguamiento externo depende únicamente de los desplazamientos, mientras que el interno depende del estado deformacional, lo que implica derivadas espaciales del campo de desplazamientos. Se pueden expresar de manera general a través de las siguientes expresiones:

$$L_e \dot{w}(x, t) = \int_{\Omega} \int_0^t C_e(x, \xi, t - \tau) \dot{w}(\xi, \tau) d\tau d\xi \quad (4.2)$$

$$L_i \dot{w}(x, t) = \int_{\Omega} \int_0^t C_i(x, \xi, t - \tau) L_s \dot{w}(\xi, \tau) d\tau d\xi \quad (4.3)$$

donde  $C_e$  y  $C_i$  son las funciones de amortiguamiento externo e interno, y  $L_s$  un operador espacial.

Las condiciones iniciales y de contorno podemos expresarlas también de forma general como sigue:

$$\begin{cases} w(x, 0) = w_0(x) \\ \dot{w}(x, 0) = \dot{w}_0(x) \end{cases} \quad (4.4)$$

$$\begin{cases} M_1 w(x, t) = f_1(x, t) & , \quad x \in \Gamma_1 \\ M_2 w(x, t) = f_2(x, t) & , \quad x \in \Gamma_2 \end{cases} \quad (4.5)$$

siendo  $M_1$  y  $M_2$  sendos operadores espaciales, y  $\Gamma_1$  y  $\Gamma_2$  unos determinados dominios espaciales de contorno con sus respectivas funciones de contorno  $f_1$  y  $f_2$ .

La ecuación 4.1 no tiene solución general cerrada para la mayoría de funciones de amortiguamiento, no obstante, es posible resolverla para los siguientes casos que proponemos:

$$C_e(x, \xi, t - \tau) = H_e(x) c_e(x - \xi) g_e(t - \tau) \quad (4.6)$$

$$C_i(x, \xi, t - \tau) = H_i(x) c_i(x - \xi) g_i(t - \tau) \quad (4.7)$$

expresiones que utilizaremos como modelo de amortiguamiento viscoelástico en los análisis sucesivos. La función  $c(x - \xi)$  recibe el nombre de **función de Kernel espacial**, y representa la influencia espacial de los puntos  $\xi$  del sólido en un punto  $x$  genérico del mismo (término no local espacial). En el mismo sentido, la función  $g(t - \tau)$  denominada **función de relajación**, aporta la influencia de la historia del campo de desplazamientos en los distintos puntos del sólido (histéresis temporal).

#### Particularización de las expresiones anteriores

A continuación se aplican las expresiones anteriores a al caso de viga con amortiguamiento viscoelástico en un tramo  $[x_1, x_2] \subseteq [0, L]$  (figura 4.1), obteniendo la siguiente ecuación de movimiento:

$$\boxed{\rho A(x) \ddot{w}(x, t) + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( EI(x) \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial x^2} \right) + \underline{\underline{\Gamma(x, t)}} = F(x, t)} \quad (4.8)$$

siendo  $\Gamma(x, t)$  el término debido al amortiguamiento viscoelástico, formado por los términos externo e interno siguientes:

$$\boxed{\Gamma(x, t) = \Gamma_e(x, t) + \Gamma_i(x, t)} \quad (4.9)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \Gamma_e(x, t) = \int_{x_1}^{x_2} \int_0^\infty C_e(x, \xi, t - \tau) \dot{w}(\xi, \tau) d\tau d\xi \\ \Gamma_i(x, t) = \int_{x_1}^{x_2} \int_0^\infty C_i(x, \xi, t - \tau) \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \left( \gamma(\xi) \frac{\partial^2 \dot{w}(\xi, \tau)}{\partial \xi^2} \right) d\tau d\xi \end{array} \right\} \quad (4.10)$$

donde  $\gamma(\xi)$  es el *coeficiente de amortiguamiento interno*, y siendo las condiciones iniciales y de contorno las mismas que para el caso no amortiguado.

Como se justificó en el Capítulo 3, se definen las funciones de amortiguamiento  $C(x, \xi, t - \tau)$  como el producto de tres funciones que reflejan cada una de ellas los diferentes aspectos a tener en cuenta en el modelo, esto es, la influencia espacial, temporal, y posición  $x_1, x_2$  del tratamiento amortiguador.

$$C(x, \xi, t - \tau) = H(x) c(x - \xi) g(t - \tau) \quad (4.11)$$

La función  $c(x, \xi)$  (función de Kernel espacial) representa el aspecto no local en el espacio,  $g(t - \tau)$  (función de relajación) la influencia de la historia de movimientos de la viga, y  $H(x)$  se utiliza para definir el dominio espacial en el cual hay que considerar el efecto amortiguador, que habitualmente se considera coincidente con el intervalo  $[x_1, x_2]$ , es decir, tomará un valor constante  $H_0$  si  $x_1 \leq x \leq x_2$  y un valor nulo en el resto de puntos. A su vez, tanto la función de Kernel espacial como la función de relajación, aceptan modelos que intentan aproximarse al comportamiento real de la viga. Seguidamente se exponen algunos de ellos.

### 4.1.2. Casos especiales de función de amortiguamiento

Amortiguamiento viscoso local:

A través de la función  $C(x, \xi, t - \tau)$  se puede particularizar el modelo de amortiguamiento al caso de amortiguamiento viscoso local, donde desaparece el aspecto no local del modelo y donde deja de influir la historia del campo de desplazamientos de la viga. Lo podemos conseguir definiendo las siguientes identidades:

$$\boxed{c(x - \xi) = \delta(x - \xi) \ ; \ g(t - \tau) = \delta(t - \tau)} \quad (4.12)$$

ya que se cumplirá para cualquier función  $\chi(\xi, \tau)$  la siguiente igualdad:

$$\int_{x_1}^{x_2} \int_0^t C_e(x, \xi, t - \tau) \chi(\xi, \tau) d\xi = H(x) \chi(x, t) \quad (4.13)$$

Amortiguamiento viscoelástico local:

$$\boxed{c(x - \xi) = \delta(x - \xi)} \quad (4.14)$$

por tanto:

$$\int_{x_1}^{x_2} \int_0^t C_e(x, \xi, t - \tau) \chi(\xi, \tau) d\xi = H(x) \int_0^t g(t - \tau) \chi(x, \tau) d\tau \quad (4.15)$$

Amortiguamiento viscoso no local:

$$\boxed{g(t - \tau) = \delta(t - \tau)} \quad (4.16)$$

que implica:

$$\int_{x_1}^{x_2} \int_0^t C_e(x, \xi, t - \tau) \chi(\xi, \tau) d\xi = H(x) \int_{x_1}^{x_2} c(x - \xi) \chi(\xi, t) d\xi \quad (4.17)$$

### 4.1.3. Caso general de función de amortiguamiento: modelos

En el caso más general, las funciones  $c(x - \xi)$  y  $g(t - \tau)$  aceptan diferentes expresiones alternativas. La función de Kernel espacial, por su significado, debe ser continua, no negativa, función par respecto a  $(x - \xi)$ , tener un máximo absoluto en  $(x - \xi) = 0$  y ser nula para  $(x - \xi) \rightarrow \infty$ . Por convenio, se normaliza de acuerdo a la siguiente expresión:

$$\int_{-\infty}^{\infty} c(x) dx = 1 \quad (4.18)$$

Algunos modelos utilizados, tanto para la función de amortiguamiento interno como externo, son los siguientes (figura 4.1):

a) Decrecimiento exponencial (figura 4.1):

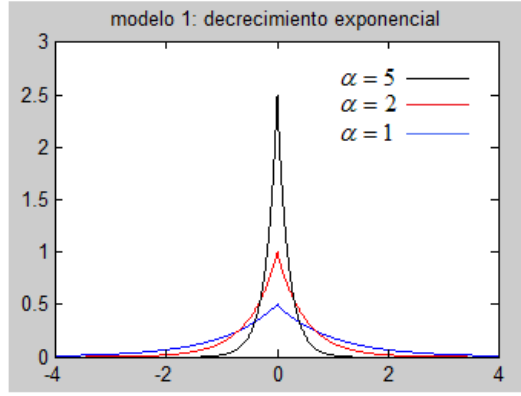


Figura 4.1: Modelo de función de Kernel: decrecimiento exponencial

$$c(x - \xi) = \frac{\alpha}{2} e^{-\alpha |x - \xi|} \quad (4.19)$$

b) Función error (figura 4.2):

$$c(x - \xi) = \frac{\alpha}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\alpha^2 (x - \xi)^2}{2}} \quad (4.20)$$



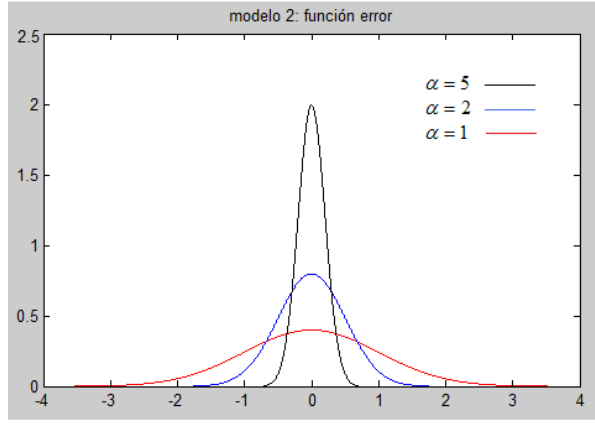


Figura 4.2: Modelo de función de Kernel: función error

c) Función escalón (figura 4.3):

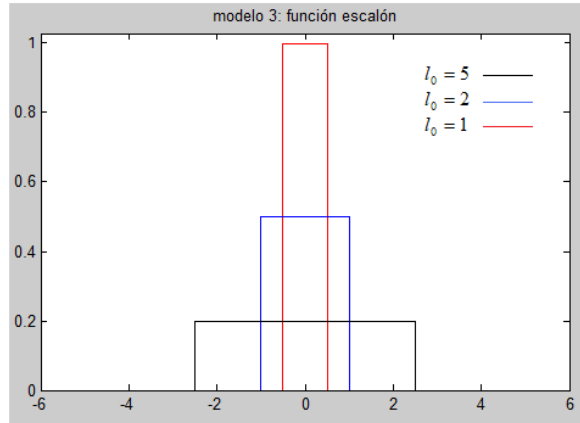


Figura 4.3: Modelo de función de Kernel: función escalón

$$c(x - \xi) = \begin{cases} 1/l_0 & , \quad |x - \xi| \leq l_0/2 \\ 0 & , \quad \text{resto} \end{cases} \quad (4.21)$$

d) Función triangular (figura 4.4):

$$c(x - \xi) = \begin{cases} \frac{1}{l_0} \left( 1 - \frac{|x - \xi|}{l_0} \right) & , \quad |x - \xi| \leq l_0 \\ 0 & , \quad \text{resto} \end{cases} \quad (4.22)$$

donde  $\alpha$  y  $l_0$  son parámetros característicos del material amortiguador. En este sentido, es útil definir una longitud característica para comparar así distintas funciones

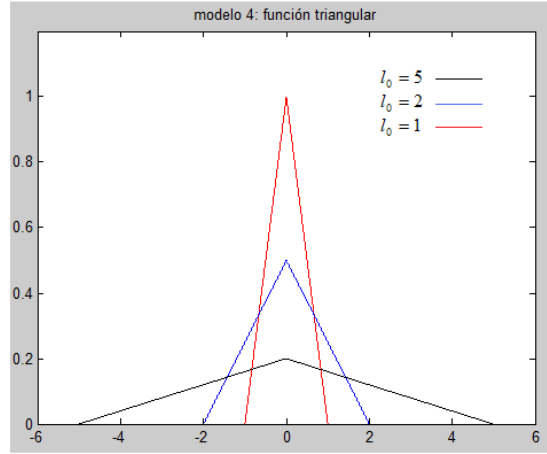


Figura 4.4: Modelo de función de Kernel: función triangular

de Kernel. En las ecuaciones 4.19 y 4.20,  $c(x - \xi) \rightarrow 0$  cuando  $\alpha \rightarrow \infty$ , mientras que en las ecuaciones 4.21 y 4.22,  $c(x - \xi) \rightarrow 0$  cuando  $|x - \xi| > l_0$ . Por esta razón, al parámetro  $l_0$  se le denomina *distancia de influencia*. Es importante destacar que para valores extremo  $\alpha \rightarrow \infty$  y  $l_0 \rightarrow 0^+$ , se reproduce el modelo de amortiguamiento local, esto es:

$$\alpha \rightarrow \infty, \quad l_0 \rightarrow 0^+ \implies c(x - \xi) \rightarrow \delta(x - \xi) \quad (4.23)$$

Para comparar el efecto no local de los distintos modelos entre sí, puede ser de gran utilidad definir una distancia característica  $\delta_p$  que dé una idea del campo de influencia de la función:

$$\int_{-\delta_p}^{\delta_p} c(x) dx = p, \quad 0 < p < 1 \quad (4.24)$$

donde  $\delta_p$  representa la distancia  $|x - \xi|$  al punto  $x$  hasta la cual se ha "cubierto" el  $(100 \cdot p)\%$  de la influencia total del efecto no local del modelo. Para los distintos modelos de función de Kernel, se llega a las siguientes expresiones:

$$\text{Decrecimiento exponencial} : \delta_p = \frac{1}{\alpha} \ln \left( \frac{1}{1-p} \right) \quad (4.25)$$

$$\text{Funcion error} : \delta_p = \frac{1}{\alpha} \sqrt{\ln \frac{1}{1-p^2}} \quad (4.26)$$

$$\text{Funcion escalon} : \delta_p = l_0 \frac{p}{2} \quad (4.27)$$

$$\text{Funcion triangular} : \delta_p = l_0 \left( 1 - \sqrt{1-p} \right) \quad (4.28)$$

La función de relajación  $g(t - \tau)$  también acepta múltiples modelos, entre los que figuran las siguientes expresiones de forma exponencial y gaussiana normalizadas:

$$g_1(t - \tau) = \frac{\sum_{k=1}^M \beta_k \mu_k e^{-\mu_k(t-\tau)}}{\sum_{k=1}^M \beta_k}, \quad g_2(t - \tau) = \frac{\sum_{k=1}^M \beta_k \sqrt{\mu_k} e^{-\mu_k(t-\tau)^2}}{\frac{\sqrt{\pi}}{2} \sum_{k=1}^M \beta_k} \quad (4.29)$$

Los parámetros  $\mu_k$  dependen de las propiedades mecánicas del material viscoelástico, y se determinan experimentalmente, mientras que  $\beta_k$  es el peso asignado a cada sumando de las expresiones anteriores. A partir de  $g(t - \tau)$  podemos definir un *tiempo de relajación característico*  $\theta_c$ , que será nulo para un material viscoso e infinito para un material perfectamente elástico:

$$\theta_c = \int_0^\infty t g(t) dt \quad (4.30)$$

La función de relajación que se utilizará en el presente trabajo será una expresión sencilla del primer modelo anterior (figura 4.5):

$$\boxed{g(t - \tau) = \mu e^{-\mu(t-\tau)}} \quad \theta_c = \frac{1}{\mu} \quad (4.31)$$

Se puede ver que para valores mayores de  $\mu$  la relajación del material se produce más rápidamente, en particular se reproduce el modelo de material viscoso para valores muy altos de este parámetro:

$$\mu \rightarrow \infty \implies g(t - \tau) \rightarrow \delta(t - \tau) \quad (4.32)$$

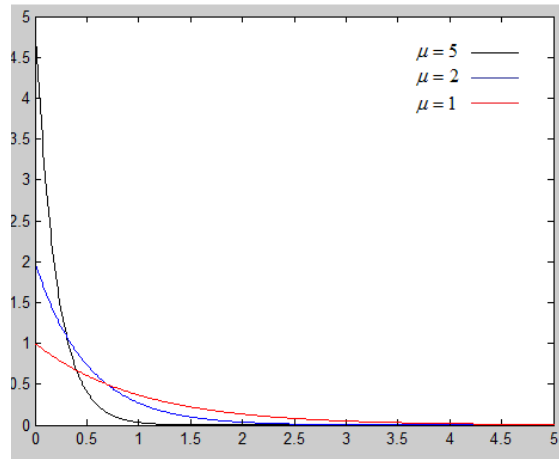


Figura 4.5: Modelo de función de relajación

## 4.2. Introducción a distintos métodos de resolución

Una vez que se han definido los modelos de función de amortiguamiento que se van a utilizar en la ecuación de movimiento de la viga amortiguada, se van a proponer a continuación diferentes métodos de resolución, algunos de los cuales no proporcionan una solución analítica exacta, aunque sí con la precisión suficiente como para considerarla aceptable. Entre los diferentes procedimientos destacan el **método de la transformada de Laplace** utilizado conjuntamente con una **descomposición de Galerkin**, mediante los cuales se descompone el desplazamiento en el dominio de Laplace en forma de serie cuyos términos estarán compuestos por productos de funciones. Posteriormente se desarrollarán algunos procedimientos de resolución aplicando diferentes **Métodos Numéricos**, para finalmente plantear un **método de descomposición en funciones cnoidales**, a título informativo, con el único fin de mostrar su existencia y viabilidad.

Una de las ventajas más significativas de la transformada de Laplace radica en que la integración y derivación se convierten en multiplicación y división, lo que transforma ecuaciones diferenciales e integrales en ecuaciones polinómicas mucho más fáciles de resolver. Por este motivo, es conveniente utilizar esta transformación para resolver la ecuación integro-diferencial del movimiento de la viga que está estudiando. Por otro lado, la descomposición de Galerkin permite transformar un problema continuo en otro discreto que en general será más fácil de resolver. El carácter integro-diferencial de nuestra ecuación hace que sea un procedimiento adecuado de resolución.

Los Métodos Numéricos son técnicas mediante las cuales es posible formular problemas matemáticos de tal forma que puedan resolverse usando operaciones aritméticas, siendo su principal objetivo encontrar soluciones "aproximadas" a problemas complejos utilizando sólo las operaciones más simples de la aritmética. Para ello, se requiere de una secuencia de operaciones algebraicas y lógicas que producen la aproximación al problema matemático, en este caso la resolución de una ecuación integro-diferencial. El hecho de haber dos variables independientes en nuestro problema,  $x$  y  $t$ , proporciona múltiples opciones de proceder, entre las cuales se destacan las siguientes:

- a) Discretización simultánea de ambas variables, utilizando para ello el concepto de diferencias finitas
- b) Semi-discretización espacial, discretizando únicamente la variable espacial y manteniendo el carácter continuo de la temporal
- c) Semi-discretización temporal, discretizando únicamente la variable temporal. El sistema se reduce a la resolución iterativa discreta en el tiempo

A la hora de decantarse por uno de estos tres procedimientos, es importante analizar las características de las variables del problema ( $x$ ,  $t$ ), y cómo influyen éstas en la resolución del mismo ( $w(x, t)$ ). El carácter dinámico del sistema y la presencia de histéresis temporal, es decir, la influencia de cada instante de tiempo en los siguientes

(pero no en los anteriores), sugiere que una discretización en la variable tiempo puede ser de gran utilidad, ya que se podrá iterar discretamente esta variable según "se avanza" en el tiempo.

Sin embargo, la viabilidad de discretizar la variable espacial requiere un análisis más profundo del fenómeno físico que interviene en el problema. En primer lugar, la variable espacial se encuentra dividida en tres intervalos claramente diferenciados, separados entre sí por los puntos  $x_1$  y  $x_2$ . El carácter general de estos dos valores introduce incertidumbre a la hora de considerar esta discretización, a lo que se añade que la función solución  $w(x, t)$  responde a diferentes mecanismos físicos en cada uno de estos tramos. Una posibilidad que evitaría estos inconvenientes es resolver únicamente el tramo con amortiguamiento mediante discretización espacial, resolviendo de forma exacta y analítica los otros dos tramos. No obstante, se aprecia que en algunos casos la función de Kernel espacial no es una función continua (en particular en el modelo de función escalón), lo que produce efectos negativos a la hora de realizar una discretización de este tipo.

Existe otro motivo claro que de nuevo indica que no sea propicio abordar el problema de esta manera, y es la presencia de derivadas espaciales de cuarto orden en la ecuación de movimiento. El método de diferencias finitas es útil normalmente para ecuaciones diferenciales de hasta segundo orden, ya que los errores que introduce en la solución son generalmente asumibles. Sin embargo, para órdenes mayores las expresiones de las derivadas en términos de diferencias finitas se hacen más complicadas de abordar, ya que aún utilizando una precisión alta en su obtención (órdenes altos de precisión), se pierde el carácter local de la derivada, hecho que se agrava en los puntos frontera del dominio espacial, en este caso los puntos  $x = x_1$  y  $x = x_2$ , donde sería prácticamente imposible iterar o, en cualquier caso, se introducirían errores de una magnitud considerable que invalidarían la solución final obtenida.

A raíz de las justificaciones anteriores, parece razonable por tanto utilizar una **semi-discretización temporal** en el problema de una viga viscoelástico con amortiguamiento no local.

Otro método numérico que se va a desarrollar está fundamentado en el **método iterativo de punto fijo**, que resuelve iterativamente ecuaciones de la forma  $f(x) = 0$ , de manera que se obtiene una sucesión  $\{x_k\}$  que en muchos casos converge a la solución buscada. En este problema se utilizará este concepto para construir una sucesión de funciones que si converge lo haga a la función solución  $w(x, t)$ .

Para finalizar con las metodologías de resolución, se introducirá de manera superficial el **método de descomposición en funciones cnoidales**, viendo sus fundamentos y viabilidad.

# Capítulo 5

## Métodos de resolución de la ecuación de movimiento

### 5.1. Método de Galerkin y Transformada de Laplace

Para resolver la ecuación de movimiento mediante este método, transformamos primeramente la ecuación al dominio de Laplace, esto es, aplicamos Transformada de Laplace a cada uno de los términos de la misma. Si se denota por  $W(x, s)$  y  $G(s)$  a las Transformadas de  $w(x, t)$  y  $g(t)$  respectivamente, se tiene:

$$\mathcal{L} [\ddot{w}(x, t)] = s^2 W(x, s) - s w(x, 0) - \dot{w}(x, 0) \quad (5.1)$$

$$\mathcal{L} [w^{IV}(x, t)] = W^{IV}(x, s) \quad (5.2)$$

Término de amortiguamiento externo:

$$\mathcal{L} [\Gamma_e(x, t)] = \int_{x_1}^{x_2} H_e(x) c_e(x - \xi) \cdot \mathcal{L} \left[ \int_0^t g_e(t - \tau) \dot{w}(\xi, \tau) d\tau \right] d\xi = \quad (5.3)$$

$$= \int_{x_1}^{x_2} H_e(x) c_e(x - \xi) \cdot \mathcal{L} [g_e(t)] \cdot \mathcal{L} [\dot{w}(\xi, t)] d\xi = \quad (5.4)$$

$$= G_e(s) \int_{x_1}^{x_2} H_e(x) c_e(x - \xi) [s W(\xi, s) - w(\xi, 0)] d\xi \quad (5.5)$$

Término de amortiguamiento interno:

$$\mathcal{L} [\Gamma_i(x, t)] = \int_{x_1}^{x_2} H_i(x) c_i(x - \xi) \cdot \mathcal{L} \left[ \int_0^t g_i(t - \tau) [\gamma(\xi) \dot{w}''(\xi, \tau)]'' d\tau \right] d\xi = \quad (5.6)$$

$$= \int_{x_1}^{x_2} H_i(x) c_i(x - \xi) \cdot \mathcal{L} [g_i(t)] \cdot \mathcal{L} [[\gamma(\xi) \dot{w}''(\xi, \tau)]''] d\xi = \quad (5.7)$$

$$= G_i(s) \int_{x_1}^{x_2} H_i(x) c_i(x - \xi) [\gamma(\xi) (s W''(\xi, s) - (w(\xi, 0))'')]'' d\xi \quad (5.8)$$

Término independiente:

$$\mathcal{L} [F(x, t)] \equiv \bar{F}(x, s) \quad (5.9)$$

La ecuación de movimiento transformada se convierte en la siguiente expresión:

$$\rho A s^2 W(x, s) + EI W^{IV}(x, s) + s G_e(s) \int_{x_1}^{x_2} H_e(x) c_e(x - \xi) W(\xi, s) d\xi + \quad (5.10)$$

$$+ s G_i(s) \int_{x_1}^{x_2} H_i(x) c_i(x - \xi) [\gamma(\xi) W''(\xi, s)]'' d\xi = \bar{F}(x, s) + \bar{K}(x, s) \quad (5.11)$$

donde las funciones  $\bar{F}(x, s)$  y  $\bar{K}(x, s)$  son funciones conocidas.  $\bar{K}(x, s)$  depende de las condiciones iniciales del problema, y queda definida a través de la siguiente expresión:

$$\bar{K}(x, s) \equiv \rho A [s w_0(x) + \dot{w}_0(x)] + G_e(s) \int_{x_1}^{x_2} H_e(x) c_e(x - \xi) w_0(\xi) d\xi + \quad (5.12)$$

$$+ G_i(s) \int_{x_1}^{x_2} H_i(x) c_i(x - \xi) [\gamma(\xi) (w(\xi, 0))'']'' d\xi \quad (5.13)$$

A continuación se desarrolla  $W(x, s)$  en forma de serie de producto de funciones (Galerkin):

$$W(x, s) = \sum_{j=1}^{\infty} q_j(s) \phi_j(x) \quad (5.14)$$

escogiendo como base, por simplicidad, las funciones  $\phi_j(x)$  que se obtendrían en el problema no amortiguado asociado, y que se pueden calcular sin dificultad. La base de funciones  $\phi_j(x)$  debe cumplir únicamente las condiciones de contorno geométricas, y no necesariamente las asociadas al extremo libre en caso de que éste existiera. El motivo de la elección de los modos propios no amortiguados reside en la condición

de ortogonalidad expuesta con anterioridad, ya que este hecho simplifica de manera importante los cálculos posteriores, como se justificará más adelante.

Sustituyendo la expresión 5.14 en la ecuación de movimiento en el dominio de Laplace, multiplicando cada término por  $\phi_k(x)$ , e integrando la expresión respecto a la variable  $x$  a lo largo de toda la viga, se llega a:

$$s^2 \sum_{j=1}^{\infty} \left( q_j(s) \int_0^L \rho A \phi_j(x) \phi_k(x) dx \right) + \sum_{j=1}^{\infty} \left( q_j(s) \int_0^L EI \phi_j^{IV}(x) \phi_k(x) dx \right) + \quad (5.15)$$

$$+ s G_e(s) \sum_{j=1}^{\infty} q_j(s) \int_0^L \int_{x_1}^{x_2} H_e(x) c_e(x - \xi) \phi_j(\xi) \phi_k(x) d\xi dx \quad (5.16)$$

$$+ s G_i(s) \sum_{j=1}^{\infty} \left( q_j(s) \int_0^L \int_{x_1}^{x_2} H_i(x) c_i(x - \xi) [\gamma(\xi) (\phi_j''(\xi) \phi_k(x))]'' d\xi dx \right) = \bar{F}(x, s) + \bar{K}(x, s) \quad (5.17)$$

A continuación se simplifica la expresión anterior utilizando la condición de ortogonalidad de los modos propios no amortiguados.

$$\sum_{j=1}^{\infty} \left( q_j(s) \int_0^L \rho A \phi_j(x) \phi_k(x) dx \right) = \sum_{j=1}^{\infty} (q_j(s) \delta_{jk}) = q_k(s) \quad (5.18)$$

$$\sum_{j=1}^{\infty} \left( q_j(s) \int_0^L EI \phi_j^{IV}(x) \phi_k(x) dx \right) = \sum_{j=1}^{\infty} (q_j(s) \omega_j^2 \delta_{jk}) = q_k(s) \omega_k^2 \quad (5.19)$$

Se llega finalmente a la siguiente ecuación matricial:

$$\boxed{[\mathbf{D}(s)] \cdot \{\mathbf{q}(s)\} = \{\mathbf{f}(s)\} + \{\mathbf{k}(s)\}} \quad (5.20)$$

siendo:

$$[\mathbf{D}(s)] = s^2 [\mathbf{M}] + s G_i(s) [\mathbf{C}_i] + s G_e(s) [\mathbf{C}_e] + [\mathbf{K}] \quad (5.21)$$

$$\{\mathbf{q}(s)\} = [q_1(s) \ q_2(s) \ \dots \ q_N(s)]^T \quad (5.22)$$

$$\{\mathbf{f}(s)\} = [f_1(s) \ f_2(s) \ \dots \ f_N(s)]^T \quad , \quad f_k(s) = \int_0^L F(x, s) \phi_k(x) dx \quad (5.23)$$



$$\{\mathbf{k}(s)\} = [k_1(s) \ k_2(s) \ \dots \ k_N(s)]^T \quad , \quad k_k(s) = \int_0^L K(x, s) \phi_k(x) dx \quad (5.24)$$

donde  $\mathbf{M}$ ,  $\mathbf{C}_e$ ,  $\mathbf{C}_i$  y  $\mathbf{K}$  son matrices cuyos elementos se pueden calcular a través de las siguientes expresiones:

$$M_{kj} = \int_0^L \rho A \phi_j(x) \phi_k(x) dx = \delta_{kj} \quad (5.25)$$

$$(C_e)_{kj} = H_0^{(e)} \int_{x_1}^{x_2} \int_{x_1}^{x_2} c_e(x - \xi) \phi_j(\xi) \phi_k(x) d\xi dx \quad (5.26)$$

$$(C_i)_{kj} = H_0^{(i)} \int_{x_1}^{x_2} \int_{x_1}^{x_2} c_i(x - \xi) \frac{d^2}{d\xi^2} \left( \gamma(\xi) \frac{d^2 \phi_j(\xi)}{d\xi^2} \right) \phi_k(x) d\xi dx \quad (5.27)$$

$$K_{kj} = \int_0^L \frac{d^2}{dx^2} \left( EI(x) \frac{d^2 \phi_j(x)}{dx^2} \right) \phi_k(x) dx = \int_0^L EI(x) \frac{d^2 \phi_j(x)}{dx^2} \frac{d^2 \phi_k(x)}{dx^2} dx + K_{kj}^* = \omega_k^2 \delta_{jk} + K_{kj}^* \quad (5.28)$$

con  $K_{kj}^* = \left[ \frac{d}{dx} \left[ EI(x) \frac{d^2 \phi_j(x)}{dx^2} \right] \phi_k(x) - EI(x) \frac{d^2 \phi_k(x)}{dx^2} \frac{d^2 \phi_j(x)}{dx^2} \right]_0^L$ , nulo para las condiciones de contorno típicas que estamos considerando, y siendo  $\delta_{kj}$  la función *delta de Kronecker* y  $w_k$  las frecuencias propias del problema no amortiguado asociado.

Del sistema 5.20 se obtienen las funciones  $q_k(t)$  de la siguiente manera:

$$\boxed{\boxed{\{\mathbf{q}(t)\} = \mathcal{L}^{-1} [\{\mathbf{q}(s)\}] = \mathcal{L}^{-1} [[\mathbf{D}(s)]^{-1} \cdot \{\mathbf{f}(s)\}] + \mathcal{L}^{-1} [[\mathbf{D}(s)]^{-1} \cdot \{\mathbf{k}(s)\}]} \quad (5.29)$$

Se observa la superposición de dos efectos en las salidas  $q_j$ . El primero de ellos,  $[\mathbf{D}(s)]^{-1} \cdot \{\mathbf{k}(s)\}$ , es debido a la sollicitación  $F(x, t)$ , mientras que el segundo,  $[\mathbf{D}(s)]^{-1} \cdot \{\mathbf{f}(s)\}$ , se debe a las condiciones iniciales del problema.

Es especialmente interesante analizar el problema de vibraciones libres asociado ( $F(x, t \equiv 0)$ , con condiciones iniciales nulas en toda la viga ( $w_0(x) \equiv 0$ ,  $\dot{w}_0(x) \equiv 0$ ), debido a que es habitual en ingeniería estructural considerar este tipo de condiciones iniciales. La ecuación de movimiento en tal caso se reduce a la siguiente expresión:

$$[\mathbf{D}(s)] \cdot \{\mathbf{q}(s)\} = \{\mathbf{0}\} \quad (5.30)$$

La *ecuación característica* asociada a este problema resulta de anular el determinante de la matriz de coeficientes:

$$\det ([\mathbf{D}(s)]) = 0 \quad (5.31)$$

cuyas raíces  $\lambda_j$  son los **autovalores** del problema, formados por una parte real y otra imaginaria, los cuales aparecerán en pares complejos conjugados. A partir de los autovalores se determinan las **frecuencias propias del sistema**,  $\bar{\omega}_j$ , y los **factores de amortiguamiento**,  $\zeta_j$ :

$$\lambda_j = -\zeta_j \bar{\omega}_j \pm i \bar{\omega}_j \quad \rightarrow \quad \boxed{\bar{\omega}_j = |\Im(\lambda_j)|} \quad \boxed{\zeta_j = -\frac{\Re(\lambda_j)}{\bar{\omega}_j}} \quad (5.32)$$

Las frecuencias propias son las correspondientes a los modos propios de vibración del sistema, mientras que los factores de amortiguamiento dan una idea la intensidad a la cual se amortigua cada modo propio, siendo éstos nulos en ausencia de amortiguamiento.

## 5.2. Método de semi-discretización temporal

### 5.2.1. Desarrollo del método

A continuación se desarrolla en detalle la resolución de la ecuación de movimiento de la viga empleando técnicas numéricas basadas en la semi-discretización de la ecuación integro-diferencial que se plantea en el problema. Para ello, se utilizarán el concepto de diferencias finitas y otros aspectos relacionados.

Al tratarse de técnicas numéricas, se estarán realizando en todo momento aproximaciones que conllevarán errores en los resultados finales obtenidos en los desplazamientos, no obstante, es imprescindible tratar de minimizarlos en la medida en que sea posible.

Para llevar a cabo este procedimiento, se discretizará la variable "tiempo" en instantes equiespaciados un intervalo  $\Delta t$ , comenzando en  $t_0 = 0$ , y se resolverá la ecuación de movimiento de la viga en todos ellos utilizando el método de diferencias finitas.

#### Dominios de las variables independientes y discretización

En primer lugar, se definen de manera estricta los dominios de las distintas variables, siendo discreto para la variable temporal y continuo para la espacial, esto es,  $t \in \{t_i\}_{i=0}^{\infty}$ ,  $x_1 \leq x \leq x_2$ . Se observa que no se considera la región espacial sin tratamiento amortiguador, ya que la solución en ese subdominio ( $\Gamma(x, t) \equiv 0$ ) se puede obtener analíticamente de manera exacta.

De manera excepcional, se definirá el instante de tiempo virtual  $t_{-1} = -\Delta t$ , sin ningún significado físico real, y que será útil únicamente a la hora de abordar el problema en los instantes iniciales  $t_0$  y  $t_1$ , como se justificará más adelante.

#### Aproximaciones numéricas

Una vez que se han definido los puntos donde se va a resolver el problema, se crea un conjunto de funciones  $\tilde{w}_j(x)$  que serán la aproximaciones a la solución en cada punto de los dominios temporal y espacial:

$$\tilde{w}_j(x) \simeq w(x, t_j) \quad , \quad j = 0, 1, 2, \dots \quad , \quad x_1 \leq x \leq x_2 \quad (5.33)$$

El objetivo será por tanto obtener estas funciones, que serán aceptadas como solución en el dominio amortiguado y en cada instante de tiempo considerado,  $t_j$ .

Este método se basa en buscar aproximaciones de los distintos términos de la ecuación de movimiento, apoyándose en el concepto de desarrollo en serie de Taylor. Si se desarrolla la función  $w(x, t)$  en torno a los puntos  $t_{j+1}$  y  $t_{j-1}$ , se tiene:

$$w(x, t_{j+1}) = w(x, t_j) + \dot{w}(x, t_j) \Delta t + \frac{1}{2} \ddot{w}(x, t_j) (\Delta t)^2 + o((\Delta t)^3) \quad (5.34)$$

$$w(x, t_{j-1}) = w(x, t_j) - \dot{w}(x, t_j) \Delta t + \frac{1}{2} \ddot{w}(x, t_j) (\Delta t)^2 + o((\Delta t)^3) \quad (5.35)$$

Restando y sumando las ecuaciones (5.34) y (5.35), se llega a sendas aproximaciones para  $\dot{w}$  y  $\ddot{w}$  con una **precisión de orden 2**, que se escriben ya en términos de las funciones  $\tilde{w}$ :

$$\boxed{\dot{w}(x, t_j) \simeq \frac{\tilde{w}_{j+1}(x) - \tilde{w}_{j-1}(x)}{2\Delta t}} \quad (5.36)$$

$$\boxed{\ddot{w}(x, t_j) \simeq \frac{\tilde{w}_{j+1}(x) - 2\tilde{w}_j(x) + \tilde{w}_{j-1}(x)}{(\Delta t)^2}} \quad (5.37)$$

Se sustituyen estas expresiones en la ecuación de movimiento, y se evalúa la variable  $t$  en  $t_j$ , llegando a una expresión de la que se podrá obtener  $\tilde{w}$  de manera iterativa. La expresión general de la ecuación de movimiento de la viga amortiguada se recuerda a continuación:

$$\rho A \ddot{w}(x, t) + EI w^{IV}(x, t) + \Gamma(x, t) = F(x, t) \quad (5.38)$$

siendo el término de amortiguamiento:

$$\Gamma(x, t) = \Gamma_e(x, t) + \Gamma_i(x, t) \quad (5.39)$$

$$\Gamma_e(x, t) = \int_{x_1}^{x_2} \int_0^t C_e(x, \xi, t - \tau) \dot{w}(\xi, \tau) d\tau d\xi \quad (5.40)$$

$$\Gamma_i(x, t) = \int_{x_1}^{x_2} \int_0^t C_i(x, \xi, t - \tau) \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \left( \gamma(\xi) \frac{\partial^2 \dot{w}(\xi, \tau)}{\partial \xi^2} \right) d\tau d\xi \quad (5.41)$$

Se puede buscar una aproximación a cada uno de los sumandos anteriores a través de las funciones  $\tilde{w}$ :

$$\rho A \ddot{w}(x, t_j) + EI w^{IV}(x, t_j) \simeq \rho A \left( \frac{\tilde{w}_{j+1}(x) - 2\tilde{w}_j(x) + \tilde{w}_{j-1}(x)}{(\Delta t)^2} \right) + EI \tilde{w}_j^{IV}(x) \quad (5.42)$$

$$\begin{aligned}
\Gamma_e(x, t_j) &= \int_{x_1}^{x_2} \int_0^{t_j} C_e(x, \xi, t_j - \tau) \dot{w}(\xi, \tau) d\tau d\xi = \\
&= \int_{x_1}^{x_2} H_e(x) c_e(x - \xi) \left( \sum_{k=1}^j \int_{t_{k-1}}^{t_k} g_e(t_j - \tau) \dot{w}(\xi, \tau) d\tau \right) d\xi \simeq \\
&\simeq \int_{x_1}^{x_2} H_e(x) c_e(x - \xi) \left( \sum_{k=1}^j g_e(t_j - t_{k-1/2}) (\tilde{w}_k(\xi) - \tilde{w}_{k-1}(\xi)) \right) d\xi \equiv \\
&\equiv \tilde{\Gamma}_j^{(e)}(x)
\end{aligned} \tag{5.43}$$

$$\begin{aligned}
\Gamma_i(x, t_j) &= \int_{x_1}^{x_2} \int_0^{t_j} C_i(x, \xi, t_j - \tau) \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \left( \gamma(\xi) \frac{\partial^2 \dot{w}(\xi, \tau)}{\partial \xi^2} \right) d\tau d\xi = \\
&= \int_{x_1}^{x_2} H_i(x) c_i(x - \xi) \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \left( \gamma(\xi) \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \left( \sum_{k=1}^j \int_{t_{k-1}}^{t_k} g_i(t_j - \tau) \dot{w}(\xi, \tau) d\tau \right) \right) d\xi \simeq \\
&\simeq \int_{x_1}^{x_2} H_i(x) c_i(x - \xi) \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \left( \gamma(\xi) \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \left( \sum_{k=1}^j g_i(t_j - t_{k-1/2}) (\tilde{w}_k(\xi) - \tilde{w}_{k-1}(\xi)) \right) \right) d\xi \equiv \\
&\equiv \tilde{\Gamma}_j^{(i)}(x)
\end{aligned} \tag{5.44}$$

Se puede por tanto despejar  $\tilde{w}_{j+1}(x)$  en función del conjunto  $\{\tilde{w}_k(x)\}_{k=0}^j$ , y utilizar la expresión para obtener todas ellas de forma recurrente:

$$\boxed{\tilde{w}_{j+1}(x) = 2\tilde{w}_j(x) - \tilde{w}_{j-1}(x) + \frac{(\Delta t)^2}{\rho A} \left[ F(x, t_j) - EI \tilde{w}_j^{IV}(x) - \tilde{\Gamma}_j^{(e)}(x) - \tilde{\Gamma}_j^{(i)}(x) \right]} \tag{5.45}$$

donde:

$$\tilde{\Gamma}_j^{(e)}(x) = \int_{x_1}^{x_2} H_e(x) c_e(x - \xi) \tilde{\Phi}_j^{(e)}(\xi) d\xi \tag{5.46}$$

$$\tilde{\Gamma}_j^{(i)}(x) = \int_{x_1}^{x_2} H_i(x) c_i(x - \xi) \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \left( \gamma(\xi) \frac{\partial^2 \tilde{\Phi}_j^{(i)}(\xi)}{\partial \xi^2} \right) d\xi \tag{5.47}$$

$$\tilde{\Phi}_j^{(e,i)}(\xi) \equiv \sum_{k=1}^j g_{e,i}(t_j - t_{k-1/2}) (\tilde{w}_k(\xi) - \tilde{w}_{k-1}(\xi)) \quad (5.48)$$

Se observa que para calcular el desplazamiento en un instante  $t_{j+1}$  se necesitan los de los instantes  $t_j$ ,  $t_{j-1}$  y  $\{t_k\}_{k=0}^j$ , por tanto hay que inicializar el procedimiento iterativo aportando previamente las funciones  $\tilde{w}_0(x)$  y  $\tilde{w}_1(x)$ , para lo cual se utilizan las condiciones iniciales del problema:  $w(x, 0) = f(x)$ ,  $\dot{w}(x, 0) = g(x)$ .

Es claro que:

$$\boxed{\tilde{w}_0(x) = f(x)} \quad (5.49)$$

sin embargo  $\tilde{w}_1(x)$  no es tan inmediato. A primera vista, puede parecer que es inevitable utilizar una aproximación de orden 1 para la primera derivada en  $t_0 = 0$ , ya que no es posible disponer de una función  $\tilde{w}_{-1}(x)$  que dé una aproximación de orden 2 en ese punto. A pesar de ello, se puede conseguir una expresión para un hipotético desplazamiento  $\tilde{w}_{-1}(x)$  en un instante virtual  $t_{-1} = -\Delta t$ , imponiendo que la ecuación (5.45) se cumple en  $t_0$ , con lo se obtiene una expresión cerrada para  $\tilde{w}_1(x)$  en función de  $f(x)$  y  $g(x)$ :

$$\dot{w}(x, 0) = g(x) = \frac{\tilde{w}_1(x) - \tilde{w}_{-1}(x)}{2\Delta t} \quad (5.50)$$

$$\tilde{w}_1(x) = 2f(x) - \tilde{w}_{-1}(x) + \frac{(\Delta t)^2}{\rho A} \left( F(x, 0) - EI f^{IV}(x) - \tilde{\Gamma}_0^{(e)}(x) - \tilde{\Gamma}_0^{(i)}(x) \right) \quad (5.51)$$

siendo  $\tilde{\Gamma}_0^{(e,i)}(x) \equiv 0$  por definición. Operando en las 2 ecuaciones anteriores se obtiene una expresión para  $\tilde{w}_1(x)$ :

$$\boxed{\tilde{w}_1(x) = f(x) + g(x)\Delta t + \frac{(\Delta t)^2}{2\rho A} (F(x, 0) - EI f^{IV}(x))} \quad (5.52)$$

Mediante este procedimiento iterativo en el tiempo, se calculan los desplazamientos de los puntos de la viga contenidos en la región amortiguada, esto es,  $x_1 \leq x \leq x_2$ . Hecho esto, se resuelven las regiones no amortiguadas a través de los procedimientos analíticos descritos en el capítulo 3, considerando como condiciones de contorno (adicionales a las que ya se tienen en  $x = 0$  y  $x = L$ ) los desplazamientos y su primera derivada en  $x = x_1$  y  $x = x_2$ , calculados anteriormente, ya que en estos puntos se debe cumplir continuidad de desplazamientos y giros:

$$0 \leq x \leq x_1 \quad , \quad x_2 \leq x \leq L \quad \rightarrow \quad \rho A \ddot{w}(x, t) + EI w^{IV}(x, t) = F(x, t) \quad (5.53)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} w(x_1, t) = \tilde{w}_{x_1}(t) \\ w'(x_1, t) = \tilde{w}'_{x_1}(t) \end{array} \right\} \text{condicion de contorno en } x_1 \quad (5.54)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} w(x_2, t) = \tilde{w}_{x_2}(t) \\ w'(x_2, t) = \tilde{w}'_{x_2}(t) \end{array} \right\} \text{condicion de contorno en } x_2 \quad (5.55)$$

siendo  $\tilde{w}_{x_1}(t)$  y  $\tilde{w}_{x_2}(t)$  dos funciones que se pueden construir a partir de los desplazamientos  $\tilde{w}_k(x_1)$  y  $\tilde{w}_k(x_2)$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$ , por ejemplo utilizando los polinomios interpoladores de Lagrange:

$$\tilde{w}_{x_i}(t) = \sum_{k=0}^n \left[ \tilde{w}_k(x_i) \prod_{j=0, j \neq k}^n \frac{t - t_j}{t_k - t_j} \right] , \quad i = 1, 2 \quad , \quad 0 \leq t \leq t_n \quad (5.56)$$

### 5.2.2. Análisis de la convergencia

El concepto de convergencia es el que cualquier método numérico pretende cumplir, y para que cualquier procedimiento numérico basado en diferencias finitas tenga validez es necesario demostrar su condición de convergente. En particular, es deseable que las funciones  $\tilde{w}_k(x)$  cumplan las siguientes relaciones:

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \tilde{w}_k(x) = w(x, t_k) \quad , \quad \forall k = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (5.57)$$

Este es un concepto generalmente difícil de comprobar directamente, y es necesario apoyarse en otras definiciones para poder abordarlo con éxito.

El problema se reduce a verificar dos propiedades básicas del esquema: su consistencia y estabilidad. Si ambas condiciones se cumplen, entonces el problema será convergente.

#### Análisis de la consistencia

La consistencia del método numérico hace referencia a su coherencia a la hora de aproximar la ecuación integro-diferencial. Se trata simplemente de comprobar si el esquema numérico utilizado es un esquema razonable para aproximar la ecuación en cuestión o, si por el contrario, corre el riesgo de aproximar a otra ecuación. Lo más habitual es comprobar la consistencia mediante el desarrollo de Taylor. El problema se reduce entonces a verificar si, cuando el paso de tiempo tiende a cero, las soluciones regulares del problema continuo son soluciones aproximadas del problema discreto en la medida en que el error de truncamiento tiende a cero.

Conviene subrayar que, aunque pueda resultar paradójico, a la hora de comprobar la consistencia no se verifica hasta qué punto las soluciones del problema discreto son soluciones del problema continuo, sino que se hace precisamente lo contrario: se comprueba si la solución del problema continuo es una solución aproximada del problema discreto.

Recordamos el esquema numérico al que se llegó:

$$\tilde{w}_{j+1}(x) = 2\tilde{w}_j(x) - \tilde{w}_{j-1}(x) + \frac{(\Delta t)^2}{\rho A} \left[ F(x, t_j) - EI \tilde{w}_j^{IV}(x) - \Gamma_j^{(e)}(\tilde{w}) - \Gamma_j^{(i)}(\tilde{w}) \right] \quad (5.58)$$

$$\Gamma_j^{(e)}(\tilde{w}) = \int_{x_1}^{x_2} H_e(x) c_e(x - \xi) \tilde{\Phi}_j^{(e)}(\xi) d\xi \quad (5.59)$$

$$\Gamma_j^{(i)}(\tilde{w}) = \int_{x_1}^{x_2} H_i(x) c_i(x - \xi) \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \left( \gamma(\xi) \frac{\partial^2 \tilde{\Phi}_j^{(i)}(\xi)}{\partial \xi^2} \right) d\xi \quad (5.60)$$

$$\tilde{\Phi}_j^{(e,i)}(\xi) \equiv \sum_{k=1}^j g_{e,i}(t_j - t_{k-1/2}) (\tilde{w}_k(\xi) - \tilde{w}_{k-1}(\xi)) \quad (5.61)$$

Por tanto, el método será consistente si se cumple la siguiente condición:

$$\boxed{\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \tau_j(x) = 0 \quad , \quad \forall x \in [0, L]} \quad (5.62)$$

$$\boxed{\tau_j(x) \equiv 2 w(x, t_j) - w(x, t_{j-1}) - w(x, t_{j+1}) + \frac{(\Delta t)^2}{\rho A} \left[ F(x, t_j) - EI w^{IV}(x, t_j) - \Gamma_j^{(e)}(w) - \Gamma_j^{(i)}(w) \right]} \quad (5.63)$$

donde  $\tau_j(x)$  se denomina *error de truncamiento*. Para demostrar la consistencia, se desarrollan en serie de Taylor las funciones  $w(x, t_{j+1})$  y  $w(x, t_{j-1})$  en torno al punto  $t_j$ , y las funciones  $w(\xi, t_k)$  y  $w(\xi, t_{k-1})$  en torno al punto  $t_{k-1/2}$ :

$$w(x, t_{j+1}) = w(x, t_j) + \dot{w}(x, t_j) \Delta t + \ddot{w}(x, t_j) \frac{(\Delta t)^2}{2} + \ddot{w}(x, t_j) \frac{(\Delta t)^3}{6} + o((\Delta t)^4) \quad (5.64)$$

$$w(x, t_{j-1}) = w(x, t_j) - \dot{w}(x, t_j) \Delta t + \ddot{w}(x, t_j) \frac{(\Delta t)^2}{2} - \ddot{w}(x, t_j) \frac{(\Delta t)^3}{6} + o((\Delta t)^4) \quad (5.65)$$

$$w(\xi, t_k) = w(\xi, t_{k-1/2}) + \dot{w}(\xi, t_{k-1/2}) \frac{\Delta t}{2} + \ddot{w}(\xi, t_{k-1/2}) \frac{(\Delta t)^2}{8} + o((\Delta t)^3) \quad (5.66)$$



$$w(\xi, t_{k-1}) = w(\xi, t_{k-1/2}) - \dot{w}(\xi, t_{k-1/2}) \frac{\Delta t}{2} + \ddot{w}(\xi, t_{k-1/2}) \frac{(\Delta t)^2}{8} + o((\Delta t)^3) \quad (5.67)$$

A continuación, se desarrolla la función  $\tilde{\Phi}$  haciendo tender a cero el paso de tiempo, utilizando las expresiones 5.66 y 5.67:

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left[ \tilde{\Phi}_j^{(e,i)}(\xi) \right] &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left( \sum_{k=1}^j g_{e,i}(t_j - t_{k-1/2}) \dot{w}(x, t_{k-1/2}) \Delta t \right) = \\ &= \sum_{k=1}^j \lim_{\Delta t \rightarrow 0} (g_{e,i}(t_j - t_{k-1/2}) \dot{w}(x, t_{k-1/2}) \Delta t) = \\ &= \sum_{k=1}^j \int_{t_{k-1}}^{t_k} (g_{e,i}(t_j - \tau) \dot{w}(x, \tau) d\tau) = \int_0^{t_j} g_{e,i}(t_j - \tau) \dot{w}(x, \tau) d\tau \end{aligned} \quad (5.68)$$

Y se sustituyen las ecuaciones 5.64, 5.65 y 5.68 en la expresión 5.63:

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \tau_j(x) &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left( F(x, t_j) - \Gamma(x, t_j) - EI w^{IV}(x, t_j) - \rho A \ddot{w}(x, t_j) + \frac{o((\Delta t)^4)}{(\Delta t)^2} \right) = \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left( 0 + \frac{o((\Delta t)^4)}{(\Delta t)^2} \right) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} (o((\Delta t)^2)) = 0 \end{aligned} \quad (5.69)$$

por lo que queda demostrada la consistencia del esquema numérico desarrollado.

### Análisis de la estabilidad

La propiedad de estabilidad consiste en asegurarse de que los esquemas discretos o semidiscretos, en su evolución temporal (discreta o continua), no amplifiquen los errores iniciales o, al menos, no lo hagan de manera creciente y descontrolada a medida que el paso del mallado (temporal o espacial) tiende a cero.

El análisis de estabilidad estudia la amplificación o amortiguación de errores introducidos en cualquier etapa del cálculo. El **método de Von Neumann** representa la solución en un instante dado mediante una serie de Fourier (expresión 5.70) y determina si algún modo de la serie puede amplificarse sin cota, en cuyo caso el esquema sería inestable.

$$\tilde{w}_j(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k^{(j)} e^{ikx} \quad , \quad i \equiv \sqrt{-1} \quad (5.70)$$

El esquema será estable si tras sustituir la expresión anterior en el esquema numérico correspondiente al problema de vibraciones libres ( $F(x, t_j) = 0, \forall j$ ), se produce una amortiguación en todos los modos, es decir, el *factor de amplificación*  $g$  en cualquier instante  $t_j$  y para cualquier modo  $k$  tiene módulo menor que la unidad:

$$\boxed{|g_{k,j}|^2 = g_{k,j} \bar{g}_{k,j} < 1 \quad , \quad \forall j, k} \quad (5.71)$$

$$\boxed{g_{k,j} \equiv \frac{a_k^{j+1}}{a_k^j}} \quad (5.72)$$

### 5.3. Método de aproximaciones sucesivas

A continuación se va a desarrollar un método iterativo que proporcione una sucesión de funciones  $\{\tilde{w}_k(x, t)\}_{k=1}^{\infty}$ , que si converge lo hará a la función solución  $w(x, t)$  en el intervalo amortiguado  $x_1 \leq x \leq x_2$ . De nuevo, será necesario además añadir a las condiciones de contorno de partida en  $x = 0$  y  $x = L$  las de continuidad de desplazamientos y de sus derivadas en  $x_1$  y  $x_2$ , para poder obtener una solución satisfactoria en todos los puntos de la viga.

La ecuación de movimiento se puede escribir de manera compacta a través de la siguiente expresión:

$$\left\{ \begin{array}{l} L(w(x, t)) + \Gamma(w(\xi, \tau)) = F(x, t) \quad , \quad x_1 \leq x \leq x_2 \\ L(w(x, t)) = F(x, t) \quad , \quad \text{resto de puntos} \end{array} \right\} \quad (5.73)$$

siendo  $L$  y  $\Gamma$  los siguientes operadores lineales:

$$L(\cdot) \equiv \rho A \frac{\partial^2(\cdot)}{\partial t^2} + EI \frac{\partial^4(\cdot)}{\partial x^4} \quad (5.74)$$

$$\Gamma(\cdot) \equiv \int_{x_1}^{x_2} \int_0^t \frac{\partial(\cdot)}{\partial \tau} C_e(x, \xi, t - \tau) d\tau d\xi + \int_{x_1}^{x_2} \int_0^t \frac{\partial(\cdot)}{\partial \tau} C_i(x, \xi, t - \tau) \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \left( \gamma(\xi) \frac{\partial^3(\cdot)}{\partial \xi^2 \partial \tau} \right) d\tau d\xi \quad (5.75)$$

La ecuación de movimiento no amortiguado asociada (a partir de este momento se centra el estudio en resolver la región amortiguada, ya que el resto de puntos se pueden resolver de manera exacta), es decir, misma geometría, condiciones iniciales y de contorno, y fuerza exterior por unidad de longitud, cuya solución  $w^*(x, t)$  podemos calcular de forma exacta, sabemos que cumple:

$$L(w^*(x, t)) = F(x, t) \quad , \quad x_1 \leq x \leq x_2 \quad (5.76)$$

Restando 5.73 y 5.76 se llega una ecuación integro-diferencial en la que se ha eliminado el término independiente  $F(x, t)$ :

$$L(w^* - w) = \Gamma(w) \quad , \quad x_1 \leq x \leq x_2 \quad (5.77)$$

A continuación, se propone el siguiente método iterativo:

$$\boxed{L(w^*(x, t) - \tilde{w}_k(x, t)) = \Gamma(\tilde{w}_{k-1}(x, t)) \quad , \quad \tilde{w}_0(x, t) = w^*(x, t)} \quad , \quad x_1 \leq x \leq x_2 \quad (5.78)$$

mediante el cual se puede obtener una sucesión  $\{\tilde{w}_k\}_{k=1}^p$  cuyo último término, si converge, se podrá tomar como función aproximación de  $w(x, t)$ . La ecuación 5.78 sigue la misma estructura que la 5.76, y por tanto se puede resolver analíticamente de manera exacta.

Para validar el método propuesto, de nuevo es necesario demostrar su condición de convergente. El método converge en este caso si se cumple la siguiente condición:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} (\tilde{w}_{k+1}(x, t) - \tilde{w}_k(x, t)) \equiv 0 \quad (5.79)$$

## 5.4. Introducción al método de descomposición en funciones *cnoidales*

En este apartado se va a plantear de manera superficial el método de descomposición en funciones *cnoidales*, utilizable para resolver la ecuación de movimiento de la viga amortiguada, y extrapolable también a otro tipo de ecuaciones diferenciales e integrales de posible interés ingenieril.

### Definición de las funciones cnoidales

Se define la variable  $v = F(\phi, m)$  a través de la siguiente expresión:

$$v = F(\phi, m) \equiv \int_0^\phi \frac{1}{\sqrt{1 - m^2 \sin^2(t)}} dt \quad ; \quad 0 \leq m \leq 1 \quad (5.80)$$

Por tanto, se puede escribir  $\phi = F^{-1}(v, m)$ .

Las tres funciones elípticas básicas de Jacobi (también denominadas funciones *cnoidales*) se definen a continuación:

$$cn(v, m) \equiv \cos(\phi) \quad (5.81)$$

$$sn(v, m) \equiv \sin(\phi) \quad (5.82)$$

$$dn(v, m) = \sqrt{1 - m^2 \sin^2 \phi} \quad (5.83)$$

donde  $m$  y  $\phi$  se denominan *módulo elíptico* y *amplitud de Jacobi* respectivamente. Se puede comprobar que son funciones periódicas de periodo  $T$ , y que son generalizaciones de las funciones trigonométricas e hiperbólicas:

$$T = 4 \int_0^{\pi/2} \frac{1}{\sqrt{1 - m^2 \sin^2 t}} dt = 4 \cdot F(\pi/2, m) \quad (5.84)$$

$$m = 0 \quad \rightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} cn(v, 0) = \cos(v) \\ sn(v, 0) = \sin(v) \\ dn(v, 0) = 1 \end{array} \right\} \quad (5.85)$$

$$m = 1 \quad \rightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} cn(v, 1) = (\cosh(v))^{-1} \\ sn(v, 1) = \tanh(v) \\ dn(v, 1) = (\cosh(v))^{-1} \end{array} \right\} \quad (5.86)$$

A título informativo, se muestran a continuación diferentes identidades, útiles a la hora de resolver ecuaciones diferenciales e integrales por medio de funciones *cnoidales*:

$$cn^2(v, m) + sn^2(v, m) = 1 \quad (5.87)$$

$$sn(u + v, m) = \frac{sn(u, m)cn(v, m)dn(v, m) + sn(v, m)cn(u, m)dn(u, m)}{1 - m^2 sn^2(u)sn^2(v)}$$

$$cn(u + v, m) = \frac{1 - 2sn^2(u, m) + m^2 sn^4(u, m)}{1 - m^2 sn^2(u)sn^2(v)} \quad (5.88)$$

$$dn(u + v, m) = \frac{1 - 2m^2 sn^2(u, m) + m^2 sn^4(u, m)}{1 - m^2 sn^2(u)sn^2(v)}$$

$$sn^2(v, m) = \frac{1 - cn(2v, m)}{1 + dn(2v, m)}$$

$$cn^2(v, m) = \frac{dn(2v, m) + cn(2v, m)}{1 + dn(2v, m)} \quad (5.89)$$

$$dn^2(v, m) = \frac{dn(2v, m) + cn(2v, m)}{1 + cn(2v, m)}$$

$$\frac{\partial sn(v, m)}{\partial v} = cn(v, m)dn(v, m)$$

$$\frac{\partial cn(v, m)}{\partial v} = -sn(v, m)dn(v, m) \quad (5.90)$$

$$\frac{\partial dn(v, m)}{\partial v} = -m^2 sn(v, m)cn(v, m)$$

#### Aplicación al problema de vibraciones libres

Para resolver la ecuación de movimiento en vibraciones libres, se descompone el desplazamiento  $w(x, t)$  como suma de funciones *cnooidales* de la siguiente manera:

$$w(x, t) = \sum_{j=1}^N A_j cn^2(\eta, m_j) \quad ; \quad \eta = kx - \omega t + \varphi \quad (5.91)$$

siendo  $A_j$  constantes desconocidas,  $k$  el *número de onda*,  $\omega$  la *frecuencia*,  $\varphi$  la *fase*, y  $N$  el número de funciones consideradas de acuerdo a la precisión requerida. Sustituyendo en la ecuación de movimiento de la viga (consideramos amortiguamiento interno nulo, por simplicidad), queda:

$$\rho A \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left( \sum_{j=1}^N A_j cn^2(\eta, m_j) \right) + EI \frac{\partial^4}{\partial x^4} \left( \sum_{j=1}^N A_j cn^2(\eta, m_j) \right) + \Gamma(x, t) = 0 \quad (5.92)$$

$$\Gamma(x, t) = \int_{x_1}^{x_2} \int_{-\infty}^t C_e(x, \xi, t - \tau) \frac{\partial}{\partial t} \left( \sum_{j=1}^N A_j cn^2(\zeta, m_j) \right) d\tau d\xi \quad ; \quad \zeta = k\xi - \omega\tau + \varphi \quad (5.93)$$

El problema de autovalores se reduce al sistema:

$$\sum_{j=1}^N (P_j + \rho \omega^2 Q_j + \omega R_j + \Upsilon_j) = 0 \quad (5.94)$$

donde  $P$ ,  $Q$  y  $R$  son polinomios en  $cn$ ,  $sn$  y  $dn$ , y:

$$\Upsilon_j = 2\omega A_j \int_{x_1}^{x_2} \int_{-\infty}^t C_e(x, \xi, t - \tau) (cn(\zeta, m_j) sn(\zeta, m_j) dn(\zeta, m_j)) d\tau d\xi \quad ; \quad \zeta = k\xi - \omega\tau + \varphi \quad (5.95)$$

Igualando los términos de la misma potencia en  $cn$ ,  $sn$  y  $dn$ , se obtiene un sistema de  $K$  ecuaciones:

$$\lambda_k(A_j, m_j, k, \varphi) = \omega_k \quad ; \quad k = 1, 2, \dots, K \quad (5.96)$$

El número de ecuaciones ( $K$ ) es menor que el número de incógnitas ( $A_j, m_j, k, \omega, \varphi$ ), por tanto son necesarias nuevas consideraciones. Para poder calcular todas las incógnitas, minimizaremos los  $K$  de las ecuaciones, definiendo los mismos de la siguiente manera:

$$r_k \equiv \lambda_k(A_j, m_j, k, \varphi) - \omega_k \quad ; \quad k = 1, 2, \dots, K \quad (5.97)$$

de esta forma quedará cerrado el problema de vibraciones libres asociado al problema amortiguado.

# Capítulo 6

## Casos prácticos

### 6.1. Introducción y metodología de resolución

En este capítulo se va a aplicar el **Método de Galerkin** apoyado en el concepto de **Transformada de Laplace**, para resolver distintos casos prácticos que se van a plantear, con el objetivo de analizar la influencia en la solución final de los distintos parámetros que intervienen en el problema.

Se tendrán en cuenta diferentes condiciones de contorno, resolviendo los casos de **viga biapoyada**, **empotrada** en un extremo y **libre** en el otro, **empotrada y apoyada**, y **biempotrada**, variando los diferentes parámetros con el fin de comparar las soluciones entre sí y sacar conclusiones sobre las diferencias que se aprecian en amortiguamientos similares aplicados en condiciones de contorno distintas.

Se resolverá un problema de referencia, caracterizado por unos valores estándar de los diferentes datos de partida tanto geométricos y de material como de los modelos que intervienen, y se hará variar cada parámetro individualmente para sacar conclusiones sobre cómo afecta a la solución final. Se realizará este proceso para cada condición de contorno, lo que nos permitirá contrastar sus diferencias de forma sencilla y directa. En todos los casos que se van a analizar se utilizará por simplicidad un valor unidad para la fuerza por unidad de longitud,  $F(x, t) = 1 \text{ N/m}$ , lo que nos permitirá sacar conclusiones de manera práctica. Asimismo, se ha considerado únicamente amortiguamiento externo sin tener en cuenta el interno en ningún caso.

A la hora de comparar los distintos casos entre sí, sería inviable hacerlo utilizando la expresión completa de  $w(x, t)$  obtenida en cada problema, ya que la expresión final de esta función es lo suficientemente compleja y extensa como para que sea inviable utilizarla con este fin. Por este motivo, se considerará en todos los casos el mismo punto geométrico para la variable espacial, lo que sí permitirá sacar resultados comparables entre sí de forma eficaz. Se ha escogido el punto medio de la viga,  $x = L/2$ , como punto de referencia, obteniendo así en cada caso la función  $w(L/2, t)$  resultante, que será graficada en un intervalo de tiempo que sea característico de cada problema.



Una vez que se ha fijado un punto geométrico de referencia, resulta importante definir una metodología que permita comparar entre sí distintas curvas  $w(L/2, t)$  obtenidas con diferentes valores paramétricos. Con este fin, se define un parámetro  $\underline{\underline{\eta}}$  al que se ha denominado **capacidad de amortiguación**, que relaciona cada curva  $w(L/2, t)$  con la correspondiente curva para el caso no amortiguado con las mismas condiciones de contorno, misma geometría, misma fuerza por unidad de longitud y mismas propiedades del material base. Se define  $\eta$  de la siguiente manera:

$$\eta \equiv 1 - \frac{w_{max} - w_{ref}}{w_{max}^* - w_{ref}} = \frac{w_{max}^* - w_{max}}{w_{max}^* - w_{ref}} \quad (6.1)$$

donde  $w_{max}$  es el valor máximo de la función  $w(L/2, t)$  obtenida para el caso amortiguado, y  $w_{max}^*$  es el valor máximo que se obtendría en ausencia de amortiguamiento y con las mismas condiciones de contorno, geométricas, de material, y de fuerza exterior por unidad de longitud. El parámetro  $w_{ref}$  es un desplazamiento de referencia que se corresponde con el punto de equilibrio de cada caso (no depende de las propiedades amortiguadoras de la viga), y que es de gran utilidad para normalizar  $\eta$ . En la figura 6.1 se justifica mediante un ejemplo la aplicación práctica de este parámetro.

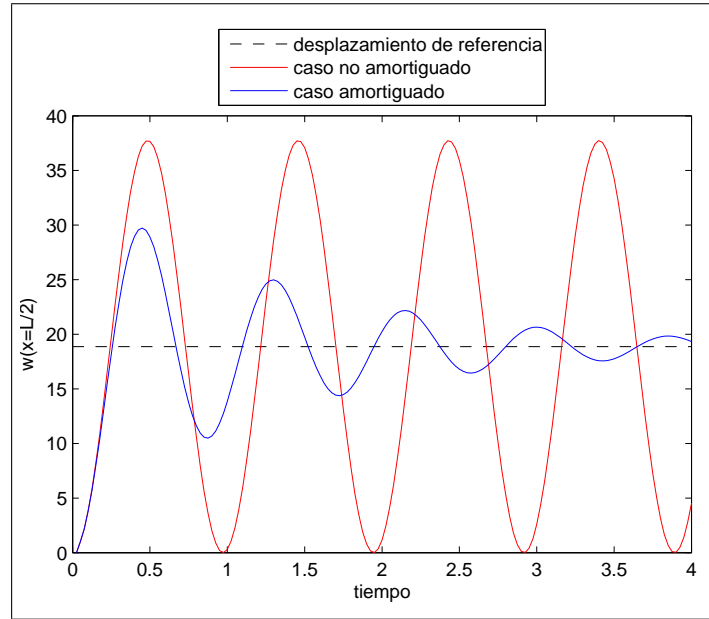


Figura 6.1: Ejemplo ilustrativo que justifica la definición de  $\eta$

La curva de color *azul* corresponde al desplazamiento  $w(L/2, t)$  obtenido para una viga amortiguada con unas características geométricas, de material, amortiguadoras, y condiciones de contorno dadas, mientras que la curva de color *rojo* es el desplazamiento que se obtendría en la misma viga en ausencia de amortiguamiento. Se puede comprobar que para el caso no amortiguado se tiene  $\eta = 0$ , mientras que  $\eta = 1$

corresponde al amortiguamiento máximo que se podría conseguir, cuando el desplazamiento máximo obtenido es igual al de equilibrio. Por tanto, se puede ver que este parámetro aporta una medida de la capacidad amortiguadora del sistema y permite comparar de forma sencilla distintos casos entre sí. Como observación, es interesante destacar que siempre se cumplirá la relación  $w_{max}^* = 2 w_{ref}$  por las características del problema que estamos abordando, ya que el desplazamiento máximo del caso no amortiguado ( $w_{max}^*$ ) es el doble de su valor medio ( $w_{ref}$ ) debido a que el valor mínimo de la oscilación es nulo por serlo el desplazamiento en el instante inicial.

### Parámetros de referencia

Los datos de referencia geométricos, de material y amortiguadores que se utilizarán a la hora de analizar su influencia en todos los casos, se muestran a continuación.

- Geometría:

- Longitud de la viga:  $L = 2 \text{ m}$
- Sección transversal: cuadrada de lado 5 mm  $\rightarrow A = 25 \text{ mm}^2$ ,  $I = 52,0833 \text{ mm}^4$

- Material base:

- Densidad:  $\rho = 2700 \text{ kg/m}^3$
- Módulo de elasticidad:  $E = 70 \text{ GPa}$

- Amortiguamiento externo:

- Extensión:  $x_1 = L/4$ ,  $x_2 = 3L/4$  ( $\Delta x = L/2$ )
- Función de Kernel espacial:  $c(x - \xi) = (\alpha/2) e^{-\alpha|x-\xi|} \rightarrow \alpha = 5$
- Función de relajación:  $g(t - \tau) = \mu e^{-\mu(t-\tau)} \rightarrow \mu = 30$
- $H(x) = H_0$  si  $x_1 \leq x \leq x_2$ ; 0 en el resto  $\rightarrow H_0 = 1 \text{ N s/m}$

- Fuerza exterior:

- $F(x, t) = 1 \text{ N/m}$

- Condiciones iniciales:

- Desplazamiento:  $w(x, 0) = 0$
- Velocidad:  $\dot{w}(x, 0) = 0$

## 6.2. Caso 1: condiciones de contorno apoyo-apoyo

### 6.2.1. Modos propios no amortiguados

El primer paso en la resolución es determinar los modos propios del problema no amortiguado asociado, esto es, obtener el conjunto de funciones  $\{\phi_j\}_{j=1}^{\infty}$  que serán utilizadas posteriormente para resolver el problema con amortiguamiento. Para determinarlas se aplican las condiciones de contorno a la expresión general dada por la ecuación 3.12:

$$\phi_j(x) = A_j \cos \eta_j x + B_j \sin \eta_j x + C_j \cosh \eta_j x + D_j \sinh \eta_j x \quad ; \quad \eta_j^4 \equiv \frac{\rho A}{EI} \omega_j^2 \quad (6.2)$$

$$w(0, t) = w(L, t) = 0 \quad , \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(0, t) = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(L, t) = 0 \quad (6.3)$$

Imponiendo que exista solución no nula, y normalizando la expresión, resulta:

$$\boxed{\phi_j(x) = \sqrt{\frac{2}{\rho A L}} \sin \frac{j\pi x}{L}} \quad \boxed{\omega_j = \left(\frac{j\pi}{L}\right)^2 \sqrt{\frac{EI}{\rho A}}} \quad (6.4)$$

### 6.2.2. Resolución del problema estándar

A continuación se resuelve paso a paso el problema amortiguado estándar correspondiente a una viga biapoyada, donde se han considerado un total de 5 términos en la serie de Galerkin ( $N = 5$ ).

Matrices de masa, rigidez y amortiguamiento:

$$M_{kj} = \int_0^L \rho A \phi_j(x) \phi_k(x) dx = \delta_{kj} \quad (6.5)$$

$$K_{kj} = \int_0^L EI \frac{d^4 \phi_j(x)}{dx^4} \phi_k(x) dx = \omega_k^2 \delta_{kj} \quad (6.6)$$

$$C_{kj} = H_0 \int_{x_1}^{x_2} \int_{x_1}^{x_2} c(x - \xi) \phi_j(\xi) \phi_k(x) d\xi dx \quad (6.7)$$

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (6.8)$$

$$K = \begin{pmatrix} 328,831 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5261,29 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 26635 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 84181 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 205519 \end{pmatrix} \quad (6.9)$$

$$C = \begin{pmatrix} 9,93183 & 0 & -4,31385 & 0 & -0,74402 \\ 0 & 3,77749 & 0 & -3,47988 & 0 \\ -4,31385 & 0 & 3,05455 & 0 & -1,36575 \\ 0 & -3,47988 & 0 & 3,57070 & 0 \\ -0,74402 & 0 & -1,36575 & 0 & 2,58939 \end{pmatrix} \quad (6.10)$$

Autovalores:

Una vez que se han calculado las tres matrices anteriores, se obtienen las raíces del polinomio característico, esto es, los autovalores del problema, resultando los siguientes valores numéricos:

$$\det([D(s)]) = \det(s^2 [M] + sG(s) [C] + [K]) = 0 \quad , \quad G(s) = \frac{30}{30 + s} \quad (6.11)$$

$$\begin{aligned} \lambda_{1,2} &= -4,027709 \pm 20,82479 i \\ \lambda_{3,4} &= -0,2717506 \pm 73,2012 i \\ \lambda_{5,6} &= -0,05043038 \pm 163,4764 i \\ \lambda_{7,8} &= -0,01891063 \pm 290,3219 i \\ \lambda_{9,10} &= -0,005644544 \pm 453,4276 i \\ \lambda_{11} &= -21,8817 \\ \lambda_{12} &= -29,42231 \\ \lambda_{13} &= -29,95114 \\ \lambda_{14} &= -29,99636 \\ \lambda_{15} &= -29,9996 \end{aligned}$$

La ecuación 6.11 tiene  $2N$  raíces complejas para el caso de material viscoso ( $G(s)=1$ ), y  $3N$  para el caso viscoelástico general, de las cuales  $2N$  son pares complejos conjugados y  $N$  son reales de valores todos ellos próximos a  $-\mu$  debido al término  $G(s)$  adicional. En nuestro caso obtenemos por tanto 10 raíces complejas en pares conjugados y 5 raíces reales próximas al valor  $-30$ .

Todos los autovalores deben tener parte real negativa, ya que es condición necesaria para que la solución sea amortiguada. En caso contrario el desplazamiento aumentaría indefinidamente con el tiempo:

$$w(x, t) = \sum_{j=1}^5 \phi_j(x) q_j(t) \quad , \quad q_j(t) \sim e^{\lambda_j t} \quad (6.12)$$

Términos de la ecuación  $[D(s)] \cdot \{q(s)\} = \{f(s)\} + \{k(s)\}$ :

$$[D(s)] = s^2 [M] + sG(s) [C] + [K] \quad , \quad G(s) = \frac{30}{s + 30}$$

$$\{f(s)\} = \frac{1}{s} \cdot \begin{pmatrix} 4,9007 \\ 0 \\ 1,6336 \\ 0 \\ 0,9801 \end{pmatrix} \quad , \quad \{k(s)\} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Flecha del punto medio en función del tiempo:

Una vez que se calculan los términos  $\{q(s)\}$  del sistema anterior, se obtienen las funciones  $\{q(t)\}$  aplicando Transformada de Laplace inversa, y por tanto se pueden evaluar los 5 términos de  $w(L/2, t)$ .

El desplazamiento vertical obtenido en el punto medio de la viga aparece graficado en la figura 6.2, comparándose con el caso no amortiguado asociado (que se calcula a su vez resolviendo el problema para  $H_0 = 0$  de forma análoga). Se observa claramente la influencia del amortiguamiento en el movimiento vibratorio del punto medio de la viga. También se puede comprobar que la flecha converge exactamente al desplazamiento obtenido para el caso estático no amortiguado ( $w_\infty(L/2) = 5FL^4/384EI = 5,71cm$ ), que es precisamente el punto de equilibrio del problema actual.

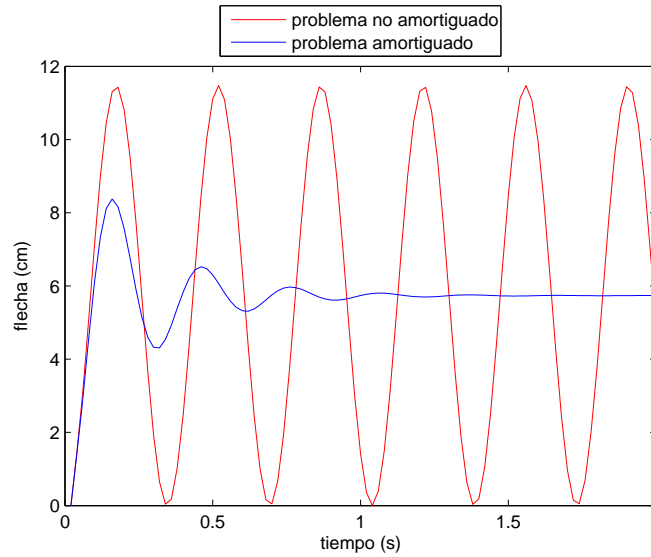


Figura 6.2: Desplazamiento del punto medio para la viga biapoyada estándar

Capacidad de amortiguación,  $\eta$ :

Se calcula el parámetro  $\eta$  a partir del desplazamiento obtenido. El valor máximo obtenido para el caso amortiguado es  $w_{max} = 8,3769 \text{ cm}$ , mientras el del caso no

amortiguado es  $w_{max}^* = 11,4726 \text{ cm}$ . El desplazamiento de referencia para esta condición de contorno resulta  $w_{ref} = 5,7363 \text{ cm}$ .

$$\eta \equiv 1 - \frac{w_{max} - w_{ref}}{w_{max}^* - w_{ref}} = \frac{w_{max}^* - w_{max}}{w_{max}^* - w_{ref}} = 0,5397 \equiv 53,97\% \quad (6.13)$$

Se puede afirmar por tanto que la viga se ve amortiguada en su punto medio en un 53,97% respecto al movimiento del problema no amortiguado asociado.

### 6.2.3. Influencia de N

Para estudiar cómo afecta el número de términos  $N$  considerados en la solución, es imprescindible analizar la contribución de cada uno de los 5 modos al desplazamiento total (figura 6.3). Para las condiciones de contorno del problema actual, se anulan los modos pares en  $x = L/2$ , por tanto en este caso únicamente hay que considerar los términos 3 y 5.

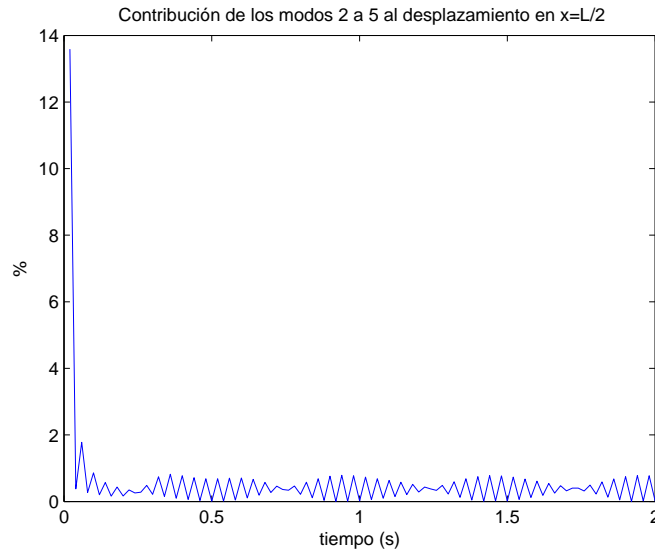


Figura 6.3: Contribución de los modos 2 a 5 al desplazamiento en  $x = L/2$

Como puede observarse, los términos correspondientes a los modos 3 y 5 representan menos de un 1% del desplazamiento total, por tanto se ve claramente que el primer modo es el predominante e incluso puede afirmarse que bastaría por sí mismo a la hora de resolver el problema que estamos estudiando. Por este motivo, se utilizará  $N = 1$  a partir de este momento en los casos correspondientes a estas mismas condiciones de contorno, obteniendo así una alta precisión en los desplazamientos obtenidos en los distintos instantes de tiempo considerados. Únicamente en los instantes iniciales

( $t \simeq 0,04$  s) se obtiene una aportación no despreciable ( $\simeq 10\%$ ), debido a que los desplazamientos totales son de una magnitud pequeña, aunque se trata de un intervalo de tiempo que no influye en los resultados finales obtenidos.

#### 6.2.4. Solución analítica para N=1

Una vez que se ha concluido que una buena aproximación de  $w(x, t)$  se obtiene considerando únicamente el primero de los modos, es interesante resolver este caso particular debido a su sencillez operacional. Para ello, se puede resolver el problema para  $N = 1$ , obteniendo la siguiente expresión relativa al desplazamiento en  $x = L/2$ :

$$\boxed{w(x, t) = q_1(t) \phi_1(x)} \quad , \quad \boxed{\phi_1(x) = \sqrt{\frac{2}{\rho A L}} \sin\left(\frac{\pi}{L} x\right)} \quad , \quad \omega_1 = \left(\frac{\pi}{L}\right)^2 \sqrt{\frac{EI}{\rho A}} \quad (6.14)$$

$$[s^2 M + sG(s) C + K] \cdot q(s) = f(s) + k(s) \quad (6.15)$$

Se resuelve el problema y se obtienen los siguientes resultados:

$$M = 1 \quad , \quad C = H_0 \int_{x_1}^{x_2} \int_{x_1}^{x_2} c_e(x - \xi) \phi_1(\xi) \phi_1(x) d\xi dx \quad , \quad K = \omega_1^2 \quad (6.16)$$

$$G(s) = \frac{\mu}{s + \mu} \quad , \quad f(s) = \int_0^L \phi_1(x) dx = \frac{4}{\pi} \sqrt{\frac{2L}{\rho A}} \frac{1}{s} \quad , \quad k(s) = 0 \quad (6.17)$$

Ecuación característica y autovalores:

$$s^2 + \frac{\mu s}{s + \mu} C + \omega_1^2 = 0 \quad \rightarrow \quad \underline{\underline{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3}} \quad (6.18)$$

Obtención de  $q_1(t)$ :

$$q_1(s) = \frac{f(s)}{s^2 + sG(s) C + \omega_1^2} \quad (6.19)$$

$$q_1(t) = \mathcal{L}^{-1}[q_1(s)] \quad (6.20)$$

$$\boxed{q_1(t) = \frac{4}{\pi \omega_1^2} \sqrt{\frac{2L}{\rho A}} \left[ 1 - \sum_{j=1}^3 \left( \frac{\lambda_j^2 + \mu \lambda_j + \mu C}{3\lambda_j^2 + 2\mu \lambda_j + \mu C + \omega_1^2} \cdot e^{\lambda_j t} \right) \right]} \quad (6.21)$$

La expresión obtenida es útil a la hora de discernir cómo influyen los distintos parámetros del problema en el desplazamiento de cualquier punto de la viga, ya que, como se ha comprobado anteriormente, este primer término de la serie es el predominante y da una buena aproximación del desplazamiento vertical (en la expresión anterior se puede comprobar además que  $q_1(0) = 0$  y  $\dot{q}_1(0) = 0$ ).

El objetivo de haber obtenido la expresión anterior es observar la importancia que adquieren los autovalores  $\lambda_j$  en el comportamiento de la viga. Se observa claramente que el desplazamiento se amortigua según  $e^{\lambda_j t}$ , lo que nos da una idea de la importancia de los autovalores, en particular su parte real.

Se puede particularizar la expresión general de  $q_1(t)$  para el caso de amortiguamiento viscoso ( $\mu \rightarrow \infty$ ) y amortiguamiento local ( $c(x - \xi) \rightarrow \delta(x - \xi)$ ):

a) Amortiguamiento viscoso:

$$\lim_{\mu \rightarrow \infty} q_1(t) = \frac{4}{\pi \omega_1^2} \sqrt{\frac{2L}{\rho A}} \left[ 1 - \sum_{j=1}^3 \left( \frac{\lambda_j + C}{2\lambda_j + C} \cdot e^{\lambda_j t} \right) \right] \quad (6.22)$$

a) Amortiguamiento local:

$$C = H_0 \int_{x_1}^{x_2} \int_{x_1}^{x_2} \delta(x - \xi) \phi_1(\xi) \phi_1(x) d\xi dx = \frac{1}{\rho AL} \left( \Delta x - \frac{L}{2\pi} \left( \sin \frac{2\pi x_2}{L} - \sin \frac{2\pi x_1}{L} \right) \right) \quad (6.23)$$

para  $x_1 = L/4$  y  $x_2 = 3L/4$ :

$$C = \frac{H_0}{\rho A} \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \right) \quad (6.24)$$

Finalmente se puede calcular de manera sencilla el punto de equilibrio o estacionario, evaluando la expresión para un tiempo infinito:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} q_1(t) = \frac{4}{\pi \omega_1^2} \sqrt{\frac{2L}{\rho A}} \quad (6.25)$$

que nos proporciona un desplazamiento coincidente con el del caso estático sin ningún tipo de amortiguamiento existente.

Es interesante también intentar obtener una expresión analítica para la capacidad de amortiguación en cualquier punto de la viga,  $\eta(x)$ , utilizando el desarrollo de un



término. De esta forma se podrá analizar cómo varía este parámetro de un punto a otro contenido en la región amortiguada:

$$\eta(x) = \left[ \frac{w_{max}^* - w_{max}}{w_{max}^* - w_{ref}} \right]_x = \frac{[\phi_1(x)q_1^*(t)]_{max\ en\ t} - [\phi_1(x)q_1(t)]_{max\ en\ t}}{[\phi_1(x)q_1^*(t)]_{max\ en\ t} - \phi_1(x)q_1(\infty)} = \frac{[q_1^*(t)]_{max} - [q_1(t)]_{max}}{[q_1^*(t)]_{max} - q_1(\infty)} \quad (6.26)$$

desarrollando la definición se llega a una expresión que no depende de  $x$ , por tanto se puede concluir que **la capacidad de amortiguación  $\eta$  es la misma en todos los puntos de la viga siempre que el primer modo de la serie sea predominante.** Por tanto, bastará con analizar el punto  $x = L/2$  para obtener de manera muy precisa el amortiguamiento producido en el resto de puntos para las condiciones de contorno que estamos considerando en este apartado.

### 6.2.5. Influencia del modelo utilizado en $c(x - \xi)$

Para analizar posibles diferencias en los resultados obtenidos a través de los 4 modelos de función de Kernel espacial, se han simulado los modelos decrecimiento exponencial y función error para  $\alpha = 5$  y los modelos función escalón y función triangular para  $l_0 = 0,8$ , observando que se obtienen resultados similares en los desplazamientos del punto medio de la viga biapoyada (figuras 6.4, 6.5, 6.6 y 6.7). Por tanto se concluye que la elección del modelo de función de Kernel espacial no es determinante de cara a la resolución del problema, y se pueden obtener resultados similares con distitos modelos eligiendo adecuadamente los parámetros  $\alpha$  y  $l_0$  en cada caso. En los cálculos sucesivos utilizaremos únicamente el modelo decrecimiento exponencial, para el valor estándar  $\alpha = 5$ .

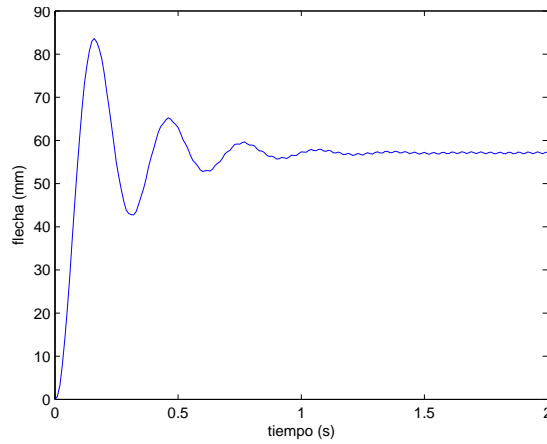


Figura 6.4: Desplazamiento del punto medio para el modelo exponencial ( $\alpha = 5$ )

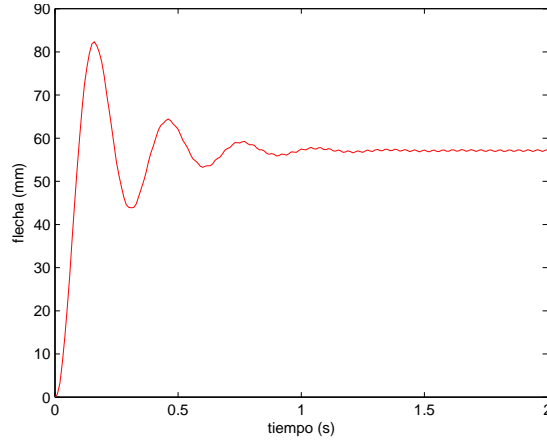


Figura 6.5: Desplazamiento del punto medio para el modelo función error ( $\alpha = 5$ )

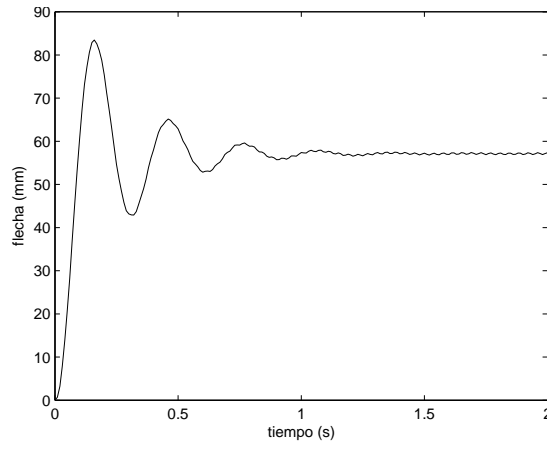


Figura 6.6: Desplazamiento del punto medio para el modelo función escalón ( $l_0 = 0,8$ )

### 6.2.6. Influencia de $H_0$

Obviamente, parece razonable pensar que un mayor valor de  $H_0$  amortiguará una mayor cantidad, debido a que el término de amortiguamiento de la ecuación de movimiento de la viga es proporcional a este parámetro. Se ha resuelto el caso estándar para diferentes valores de  $H_0$ , obteniendo los resultados mostrados en la figura 6.8.

Asimismo, se ha calculado la capacidad de amortiguación  $\eta$  (%) en función de  $H_0$ , manteniendo los demás parámetros con su valor estándar (figura 6.9).

Se observa que la relación  $\eta - H_0$  no es lineal, como podía parecer a priori por la proporcionalidad entre el término de amortiguamiento y el parámetro  $H_0$ , y se alcanza un amortiguamiento del 100 % para valores cercanos a  $H_0 = 2,5 \text{ N s/m}$ .

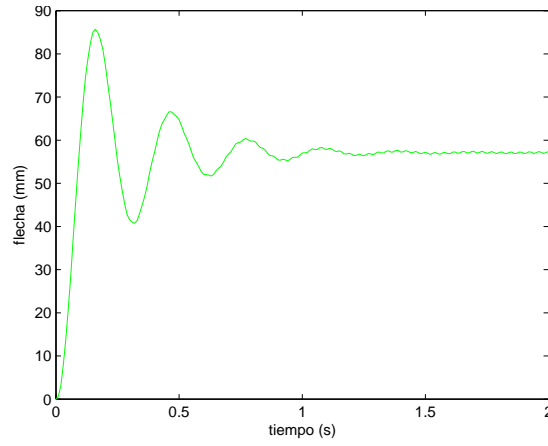


Figura 6.7: Desplazamiento del punto medio para el modelo función triangular ( $l_0 = 0,8$ )

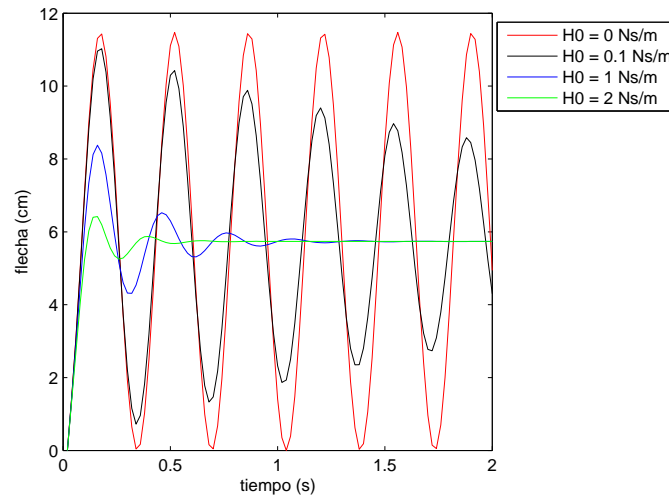


Figura 6.8: Desplazamiento del punto medio para distintos valores de  $H_0$

### 6.2.7. Influencia de $\mu$

Observando la ecuación de movimiento de la viga, no es sencillo intentar estimar cómo influirá el parámetro  $\mu$  de la función de relajación en la solución final del problema. Se ha resuelto el problema estándar para diversos valores de este parámetro, obteniendo los resultados que se muestran en la figura 6.10. Del mismo modo, se ha calculado  $\eta$  en función de  $\mu$  como se puede ver en la figura 6.11, manteniendo invariantes el resto de parámetros.

Se ve claramente que la viga sufre una mayor amortiguación a medida que aumenta  $\mu$ , es decir, cuando el material amortiguador se hace más viscoso. En el caso de un material perfectamente viscoso ( $\mu \rightarrow \infty$ ), la amortiguación alcanza un valor máximo en torno al 60 %. La existencia de esta cota superior indica que a través de este

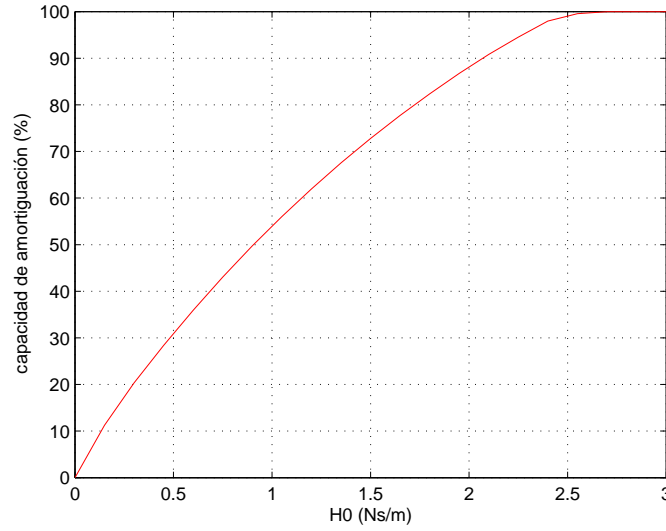


Figura 6.9: Capacidad de amortiguación  $\eta$  en función de  $H_0$

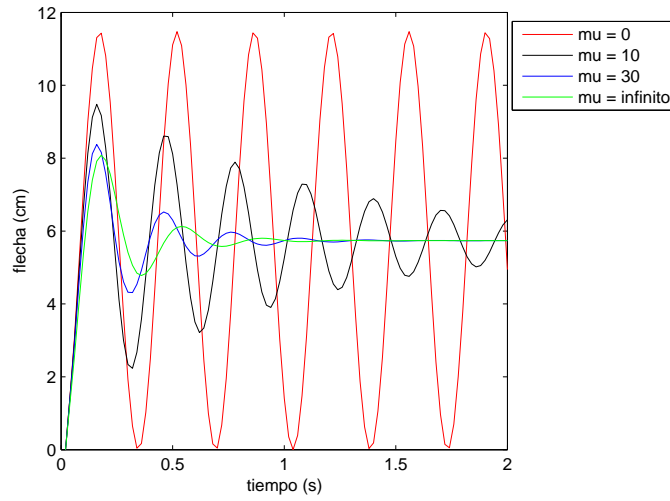


Figura 6.10: Desplazamiento del punto medio para distintos valores de  $\mu$

parámetro no se puede aumentar el amortiguamiento hasta cualquier valor deseado, sino hasta un máximo de un 60 % aproximadamente. También se extrae de la figura 6.11 que a partir de  $\mu \simeq 40$  se producen pequeños aumentos de la capacidad de amortiguación para grandes variaciones de  $\mu$ , hecho que puede no interesar si el coste de aumentar  $\mu$  es excesivo.

### 6.2.8. Influencia de $\alpha$

En las figuras 6.12 y 6.13 se muestran los desplazamientos en  $x = L/2$  para diferentes valores de  $\alpha$  y la influencia de este parámetro en la capacidad de amortiguación.

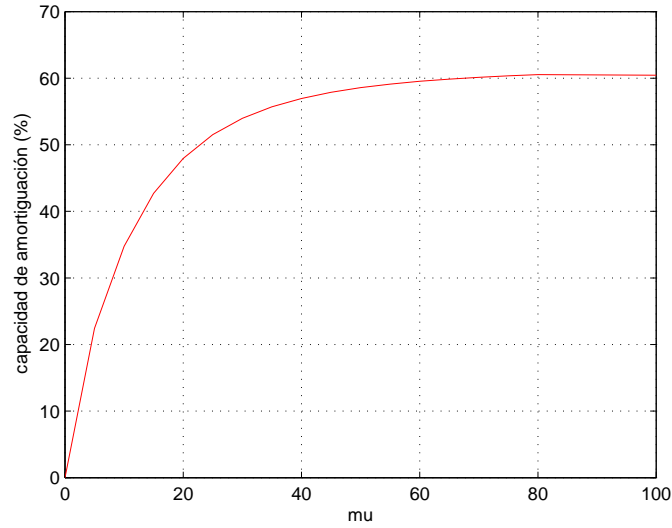


Figura 6.11: Capacidad de amortiguación  $\eta$  en función de  $\mu$

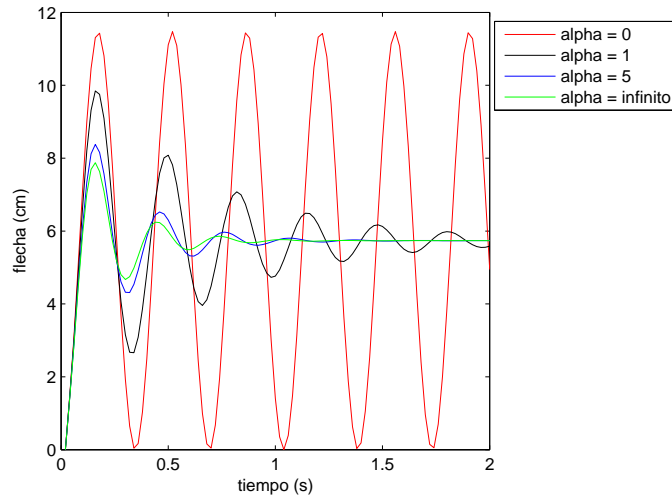


Figura 6.12: Desplazamiento del punto medio para distintos valores de  $\alpha$

Observamos de nuevo un valor máximo próximo al 62 % para valores muy altos de  $\alpha$ , siendo el límite superior correspondiente al caso de amortiguamiento viscoelástico local ( $\alpha \rightarrow \infty$ ). A partir de  $\alpha \simeq 10$  los aumentos en  $\eta$  son poco significativos ya que la pendiente de la curva se hace prácticamente nula.

### 6.2.9. Influencia de $x_2 - x_1$ (región centrada)

Es de vital importancia el tamaño de la región con tratamiento amortiguador,  $\Delta x = x_2 - x_1$ , ya que este parámetro aparece de manera activa en el término de la ecuación de movimiento correspondiente al amortiguamiento. Parece razonable pensar que el

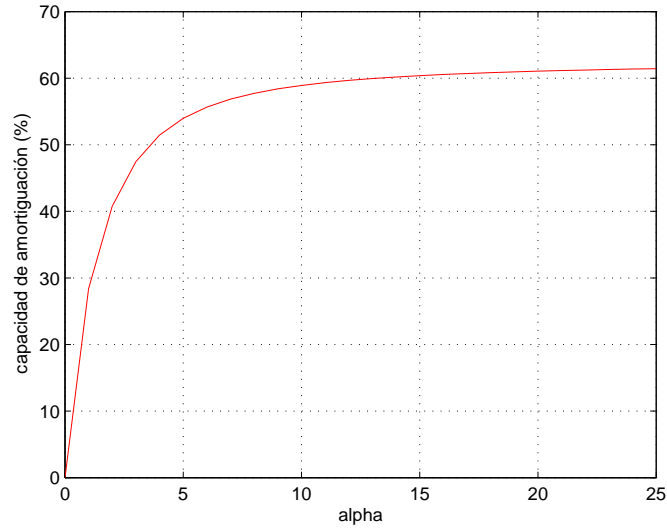


Figura 6.13: Capacidad de amortiguación  $\eta$  en función de  $\alpha$

amortiguamiento será mayor cuanto mayor sea este tamaño. Las figuras 6.14 y 6.15 ilustran este hecho de manera clara.

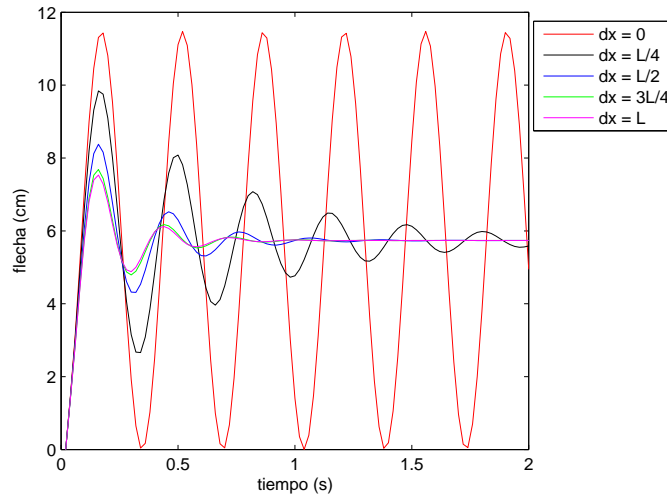


Figura 6.14: Desplazamiento del punto medio para distintos valores de  $\Delta x$  (región centrada en  $x = L/2$ )

La capacidad de amortiguación aumenta cuando lo hace el tamaño de la región no amortiguada, encontrando un máximo próximo al 66% si el amortiguamiento se encuentra en la totalidad de la viga. No obstante, para valores mayores de  $3L/4$  ( $\eta \simeq 66\%$ ) los aumentos en  $\eta$  se hacen poco significativos.

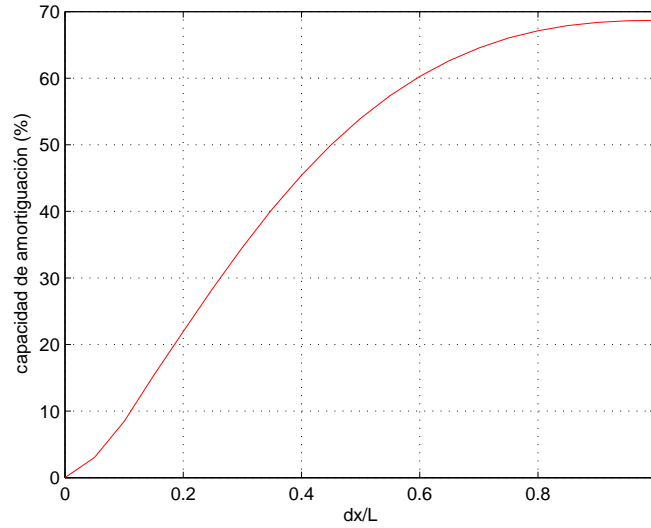


Figura 6.15: Capacidad de amortiguación  $\eta$  en función de  $\Delta x$  (región centrada en  $x = L/2$ )

#### 6.2.10. Influencia de $x_1$ ( $\Delta x = L/2$ )

Intuitivamente parece razonable pensar que  $\eta$  dependa de dónde esté situada la región amortiguadora, ya que los desplazamientos no son los mismos si se amortigua la región central de la viga o la región más próxima a uno de los apoyos, siendo en este segundo caso menor que en el primero.

Esta afirmación se comprueba en la figura 6.16, donde se ha resuelto el problema para diferentes valores de  $x_1$ , manteniendo invariante el tamaño,  $\Delta x = L/2$ .

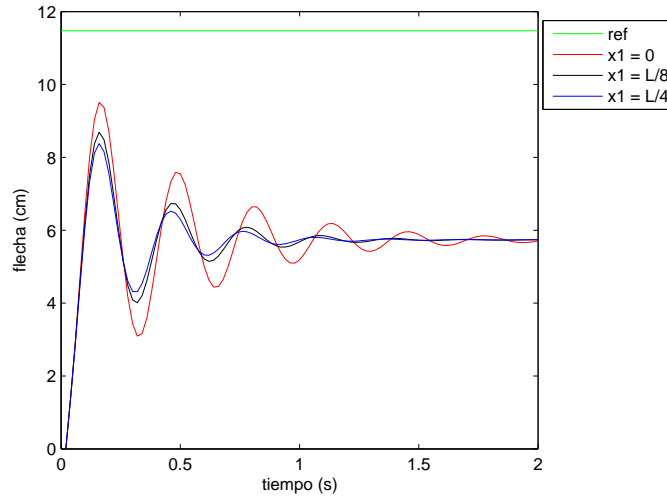


Figura 6.16: Desplazamiento del punto medio para distintos valores de  $x_1$  ( $\Delta x = L/2$ )

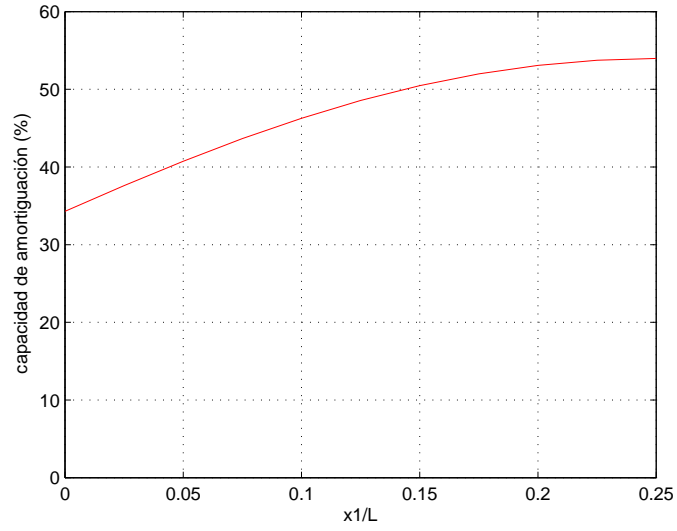


Figura 6.17: Capacidad de amortiguación  $\eta$  en función de  $x_1$  ( $\Delta x = L/2$ )

En la figura 6.17 se muestra efectivamente que  $\eta$  es máximo (54%) en el caso de amortiguamiento centrado en  $x = L/2$ , mientras que alcanza un valor mínimo (35%) cuando se sitúa próximo a uno de los apoyos de la viga.



## 6.3. Caso 2: condiciones de contorno empotramiento-libre

### 6.3.1. Modos propios no amortiguados

A continuación se va a resolver el problema estándar aplicado a una viga en voladizo, esto es, con condiciones de contorno empotramiento-libre, siguiendo la misma metodología que en el caso anterior.

$$\phi_j(x) = A_j \cos \eta_j x + B_j \sin \eta_j x + C_j \cosh \eta_j x + D_j \sinh \eta_j x \quad ; \quad \eta_j^4 \equiv \frac{\rho A}{EI} \omega_j^2 \quad (6.27)$$

$$w(0, t) = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial x}(0, t) = 0, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(L, t) = 0, \quad \frac{\partial^3 w}{\partial x^3}(L, t) = 0 \quad (6.28)$$

Imponiendo que exista solución no nula, y normalizando la expresión, resulta:

$$\boxed{\phi_j(x) = \sqrt{\frac{1}{\rho A L}} [\cosh \eta_j x - \cos \eta_j x - \beta_j \sinh \eta_j x + \beta_j \sin \eta_j x]} \quad , \quad \boxed{\omega_j = \eta_j^2 \sqrt{\frac{EI}{\rho A}}} \quad (6.29)$$

donde:

$$\beta_j = \frac{\cosh \eta_j L + \cos \eta_j L}{\sinh \eta_j L + \sin \eta_j L} \quad (6.30)$$

y siendo  $\eta_j L$  las raíces de la siguiente ecuación:

$$1 + \cosh \eta_j L \cos \eta_j L = 0 \quad (6.31)$$

Se obtienen los siguientes tres primeros valores:

$$\begin{aligned} \eta_1 L = 1,875104 & \rightarrow \beta_1 = 0,734096, \quad \omega_1 = 6,46 \\ \eta_2 L = 4,694091 & \rightarrow \beta_2 = 1,018467, \quad \omega_2 = 40,48 \\ \eta_3 L = 7,854757 & \rightarrow \beta_3 = 0,999224, \quad \omega_3 = 113,36 \end{aligned}$$

### 6.3.2. Resolución del problema estándar

El problema estándar para  $N = 3$  proporciona los resultados que se muestran a continuación.

Matrices de masa, rigidez y amortiguamiento:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (6.32)$$

$$K = \begin{pmatrix} 41,733 & 0 & 0 \\ 0 & 1639,0 & 0 \\ 0 & 0 & 12850 \end{pmatrix} \quad (6.33)$$

$$C = \begin{pmatrix} 3,30870 & 4,63845 & -1,05020 \\ 4,63845 & 8,21828 & 1,02849 \\ -1,05020 & 1,02849 & 4,56238 \end{pmatrix} \quad (6.34)$$

Autovalores:

Una vez que se han calculado las tres matrices anteriores, se obtienen las raíces del polinomio característico, esto es, los autovalores del problema, resultando los siguientes valores numéricos:

$$\begin{aligned} \lambda_{1,2} &= -1,769952 \pm 6,706273 i \\ \lambda_{3,4} &= -1,495827 \pm 42,54641 i \\ \lambda_{5,6} &= -0,1483545 \pm 6,706273 i \\ \lambda_7 &= -23,80077 \\ \lambda_8 &= -29,39189 \\ \lambda_9 &= -29,97907 \end{aligned}$$

De nuevo se observa que aparecen  $2N$  autovalores complejos en pares conjugados, y  $N$  autovalores reales, todos ellos con parte real negativa como era de esperar.

Términos de la ecuación  $[D(s)] \cdot \{q(s)\} = \{f(s)\} + \{k(s)\}$ :

$$[D(s)] = s^2 [M] + sG(s) [C] + [K] \quad , \quad G(s) = \frac{30}{s + 30}$$

$$\{f(s)\} = \frac{1}{s} \cdot \begin{pmatrix} 4,2621 \\ 2,3620 \\ 1,3849 \end{pmatrix} \quad , \quad \{k(s)\} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

### Flecha del punto medio en función del tiempo:

En la figura 6.18 se muestra el desplazamiento del punto medio de la viga en función del tiempo obtenido de resolver el sistema anterior.

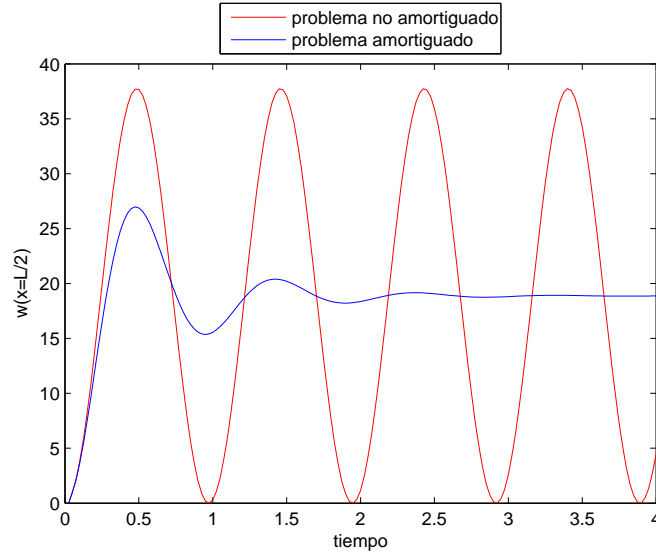


Figura 6.18: Desplazamiento del punto medio para la viga empotrada-libre estándar

### Capacidad de amortiguación, $\eta$ :

Se calcula el parámetro  $\eta$  a partir del desplazamiento obtenido. El valor máximo obtenido para el caso amortiguado es  $w_{max} = 26,984 \text{ cm}$ , mientras el del caso no amortiguado es  $w_{max}^* = 37,749 \text{ cm}$ . El desplazamiento de referencia para esta condición de contorno resulta  $w_{ref} = 18,870 \text{ cm}$ .

$$\eta \equiv 1 - \frac{w_{max} - w_{ref}}{w_{max}^* - w_{ref}} = \frac{w_{max}^* - w_{max}}{w_{max}^* - w_{ref}} = 0,5702 \equiv 57,02 \% \quad (6.35)$$

Comparando su valor con el caso de viga biapoyada (53.97 %), se puede afirmar que el tratamiento amortiguador genera un efecto algo mayor en el caso actual que en el anterior, produciendo una capacidad de amortiguación un 3 % mayor, aproximadamente.

### 6.3.3. Influencia de $N$

Se ha graficado (figura 6.19) la contribución de los modos 2 y 3 al desplazamiento total en  $x = L/2$ , obteniendo una aportación menor de un 4 % (salvo en los instantes iniciales, que no influyen en los resultados), por tanto se concluye que el primer modo es el predominante como ocurría en el caso anterior con la viga biapoyada. Esta afirmación implica de nuevo que **la capacidad de amortiguación  $\eta$  es la misma en todos los puntos de la viga.**

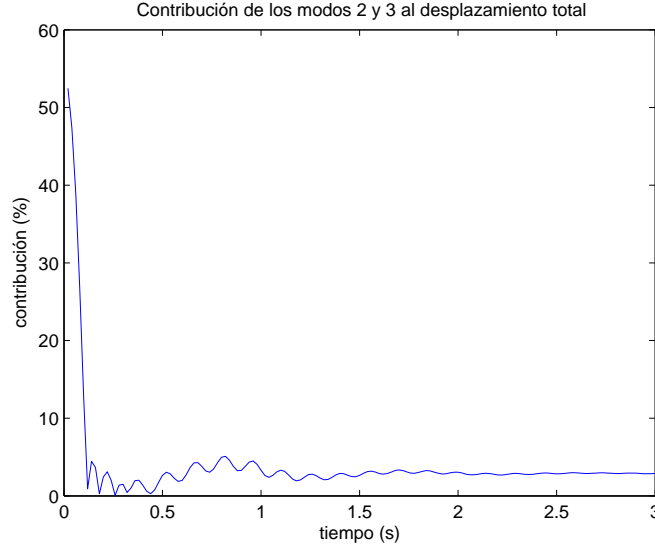


Figura 6.19: Contribución de los modos 2 y 3 al desplazamiento en  $x = L/2$

En los cálculos sucesivos para estas condiciones de contorno se considerará únicamente el primer término de la serie de Galerkin, es decir, se tomará  $N = 1$ .

### 6.3.4. Influencia de $H_0$

En las figuras 6.20 y 6.21 se muestra cómo influye el parámetro  $H_0$  en la capacidad de amortiguación de la viga, mostrando de nuevo que ésta puede crecer hasta valores del 100 % si se aumenta  $H_0$  lo suficiente.

Se observa un amortiguamiento del 100 % para valores de  $H_0$  mayores que  $2,8 \text{ N s/m}$ , ligeramente más altos que en el caso de viga biapoyada ( $2,5 \text{ N s/m}$ ).

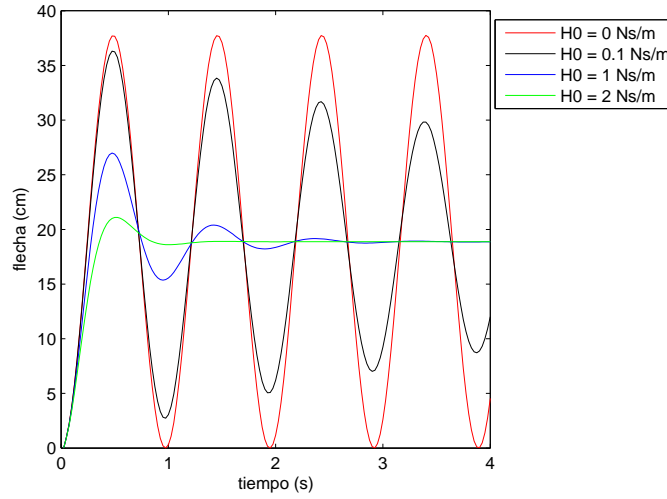


Figura 6.20: Desplazamiento del punto medio para distintos valores de  $H_0$

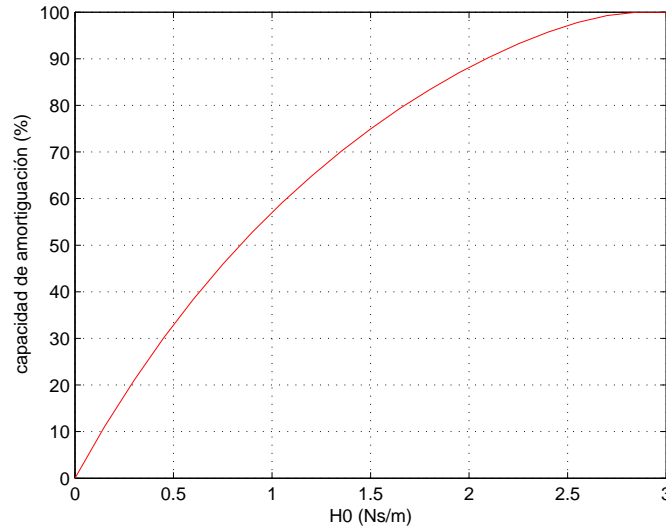


Figura 6.21: Capacidad de amortiguación  $\eta$  en función de  $H_0$

### 6.3.5. Influencia de $\mu$

En las figuras 6.22 y 6.23 se muestra cómo influye  $\mu$  en el amortiguamiento de la viga que se está considerando.

de nuevo se observa el mismo carácter asintótico que para el caso de viga biapoyada, ya que para valores de  $\mu$  mayores que 20 la pendiente de la curva se hace prácticamente nula.

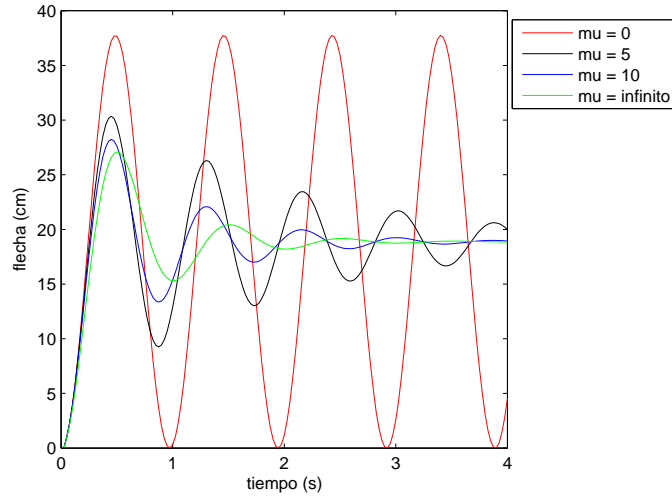


Figura 6.22: Desplazamiento del punto medio para distintos valores de  $\mu$

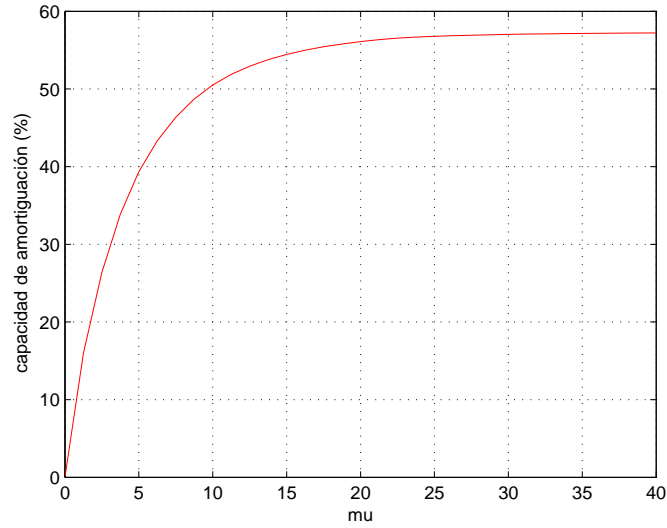


Figura 6.23: Capacidad de amortiguación  $\eta$  en función de  $\mu$

### 6.3.6. Influencia de $\alpha$

En las figuras 6.24 y 6.25 se observa un aumento de la amortiguación a medida que aumenta el valor de este parámetro, como cabía esperar, obteniendo para el caso de amortiguamiento viscoelástico local una amortiguación próxima al 67 %.

### 6.3.7. Influencia de $x_2 - x_1$ (región centrada)

En las figuras 6.26 y 6.27 se ha graficado la influencia de la longitud de la región amortiguada en los desplazamientos obtenidos en el punto medio de la viga. Es importante

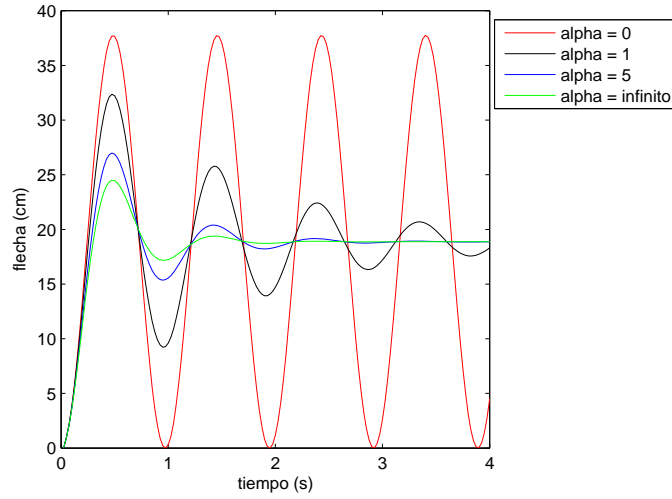


Figura 6.24: Desplazamiento del punto medio para distintos valores de  $\alpha$

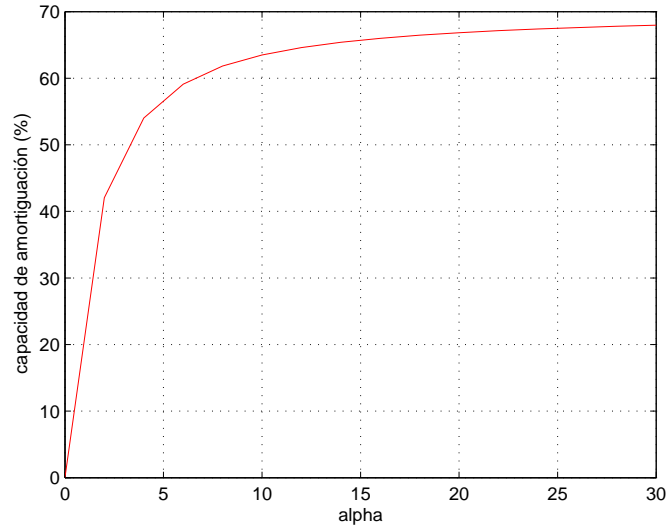


Figura 6.25: Capacidad de amortiguación  $\eta$  en función de  $\alpha$

destacar que se pueden conseguir amortiguamientos del 100 % para longitudes próximas a la total ( $\Delta x \simeq 0,9L$ ), hecho que no ocurría para las anteriores condiciones de contorno.

### 6.3.8. Influencia de $x_1$ ( $\Delta x = L/2$ )

Las figuras 6.28 y 6.29 muestran la influencia que tiene en el problema la posición de la región amortiguadora, observándose que se produce una amortiguación mayor a medida que se posiciona ésta más cerca del extremo libre de la viga, llegando incluso a valores de  $\eta$  del 100 %.

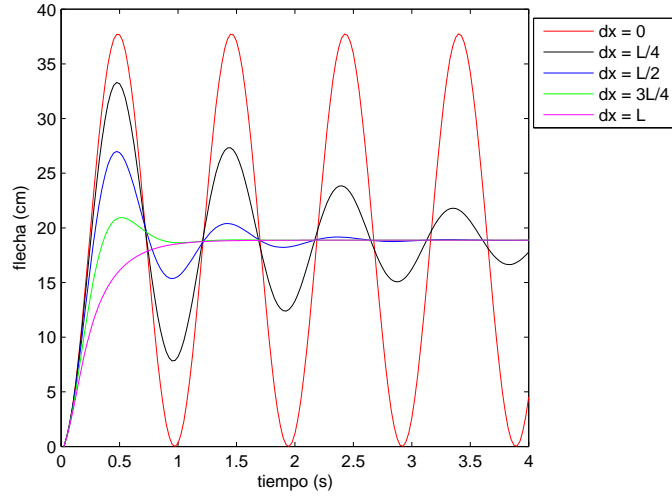


Figura 6.26: Desplazamiento del punto medio para distintos valores de  $\Delta x$  (región centrada en  $x = L/2$ )

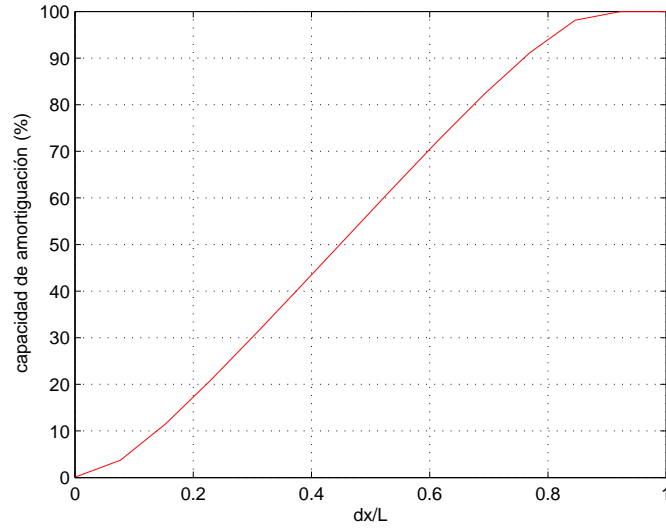


Figura 6.27: Capacidad de amortiguación  $\eta$  en función de  $\Delta x$  (región centrada en  $x = L/2$ )



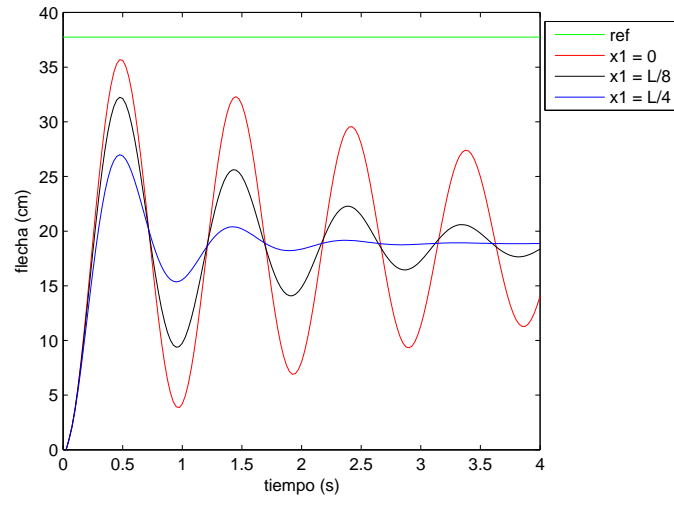


Figura 6.28: Desplazamiento del punto medio para distintos valores de  $x_1$  ( $\Delta x = L/2$ )

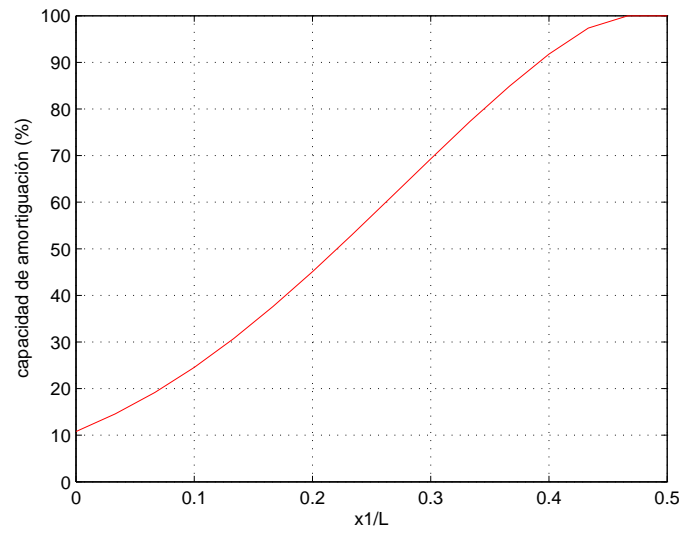


Figura 6.29: Capacidad de amortiguación  $\eta$  en función de  $x_1$  ( $\Delta x = L/2$ )

## 6.4. Caso 3: condiciones de contorno empotramiento-apoyo

### 6.4.1. Modos propios no amortiguados

$$\phi_j(x) = A_j \cos \eta_j x + B_j \sin \eta_j x + C_j \cosh \eta_j x + D_j \sinh \eta_j x \quad ; \quad \eta_j^4 \equiv \frac{\rho A}{EI} \omega_j^2 \quad (6.36)$$

$$w(0, t) = w(L, t) = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial x}(0, t) = 0, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(L, t) = 0 \quad (6.37)$$

Imponiendo que exista solución no nula, y normalizando la expresión, resulta:

$$\boxed{\phi_j(x) = \sqrt{\frac{1}{\rho AL}} [\cos \eta_j x - \cosh \eta_j x - \beta_j \sin \eta_j x + \beta_j \sinh \eta_j x]} \quad , \quad \boxed{\omega_j = \eta_j^2 \sqrt{\frac{EI}{\rho A}}} \quad (6.38)$$

donde:

$$\beta_j = \frac{\cos \eta_j L - \cosh \eta_j L}{\sin \eta_j L - \sinh \eta_j L} \quad (6.39)$$

y siendo  $\eta_j L$  las raíces de la siguiente ecuación:

$$\cos \eta_j L + \cosh \eta_j L - \beta_j (\sin \eta_j L + \sinh \eta_j L) = 0 \quad (6.40)$$

Se obtienen los siguientes cuatro primeros valores:

$$\begin{aligned} \eta_1 L = 3,926602 & \rightarrow \beta_1 = 1,00077731190727, \quad \omega_1 = 28,33 \\ \eta_2 L = 7,068583 & \rightarrow \beta_2 = 1,00000144989766, \quad \omega_2 = 91,80 \\ \eta_3 L = 10,210176 & \rightarrow \beta_3 = 1,00000000270759, \quad \omega_3 = 191,54 \\ \eta_4 L = 13,351769 & \rightarrow \beta_4 = 1,00000000000506, \quad \omega_4 = 327,54 \end{aligned}$$

### 6.4.2. Resolución del problema estándar

Tras resolver el problema para  $N = 3$ , se han encontrado desplazamientos del mismo orden correspondientes a los modos 2 y 3, por tanto se ha decidido considerar  $N = 4$  en los cálculos sucesivos.

Matrices de masa, rigidez y amortiguamiento:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (6.41)$$

$$K = \begin{pmatrix} 802,49 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 8427,6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 36686 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 107280 \end{pmatrix} \quad (6.42)$$

$$C = \begin{pmatrix} 10,069 & 2,2020 & -3,4963 & 0,2867 \\ 2,2020 & 4,7952 & 0,4867 & -3,1634 \\ -3,4963 & 0,4867 & 3,0021 & -0,5739 \\ 0,2867 & -3,1634 & -0,5739 & 3,0230 \end{pmatrix} \quad (6.43)$$

Autovalores:

Una vez que se han calculado las tres matrices anteriores, se obtienen las raíces del polinomio característico, esto es, los autovalores del problema, resultando los siguientes valores numéricos:

$$\begin{aligned} \lambda_{1,2} &= -2,632474 \pm 31,096488 i \\ \lambda_{3,4} &= -0,229888 \pm 92,510707 i \\ \lambda_{5,6} &= -0,361030 \pm 191,767256 i \\ \lambda_{7,8} &= -0,125907 \pm 327,677247 i \\ \lambda_9 &= -24,653516 \\ \lambda_{10} &= -29,562703 \\ \lambda_{11} &= -29,965073 \\ \lambda_{12} &= -29,996595 \end{aligned}$$

Aparecen de nuevo  $2N$  autovalores complejos en pares conjugados, y  $N$  autovalores reales, todos ellos con parte real negativa.

Términos de la ecuación  $[D(s)] \cdot \{q(s)\} = \{f(s)\} + \{k(s)\}$ :

$$[D(s)] = s^2 [M] + sG(s) [C] + [K] \quad , \quad G(s) = \frac{30}{s + 30}$$

$$\{f(s)\} = \frac{1}{s} \cdot \begin{pmatrix} -4,6813 \\ -0,4498 \\ -1,8202 \\ -0,2388 \end{pmatrix} \quad , \quad \{k(s)\} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Flecha del punto medio en función del tiempo:

En la figura 6.30 se muestra el desplazamiento del punto medio de la viga en función del tiempo obtenido de resolver el sistema anterior.

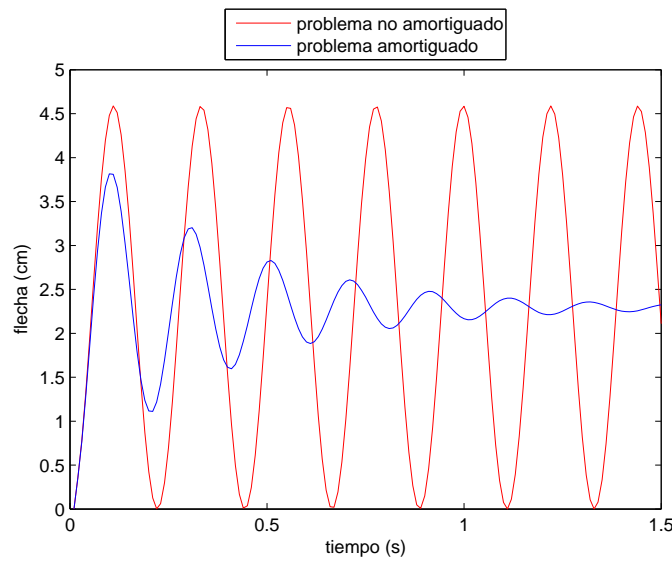


Figura 6.30: Desplazamiento del punto medio para la viga empotrada-libre estándar

Capacidad de amortiguación,  $\eta$ :

$$\eta \equiv 1 - \frac{w_{max} - w_{ref}}{w_{max}^* - w_{ref}} = \frac{0,045874 - 0,038146}{0,045874 - 0,02293924} = 0,3370 \equiv 33,70 \% \quad (6.44)$$

Se observa una amortiguación mucho menor que en los dos casos anteriores, debido posiblemente al hecho de que haya un mayor grado de hiperestatismo en el caso actual restringiéndose los movimientos de la viga en mayor proporción.

### 6.4.3. Influencia de $N$

En la figura 6.31 se observa de nuevo un carácter predominante del primero de los modos, lo que implica de nuevo que **la capacidad de amortiguación  $\eta$  es la misma en todos los puntos de la viga**. Al resolver el problema con  $N = 4$  se ha encontrado que el modo 4 es dos órdenes de magnitud menor que los términos 2 y 3, por tanto se acepta de manera definitiva al primero de ellos como mucho mayor que los demás.

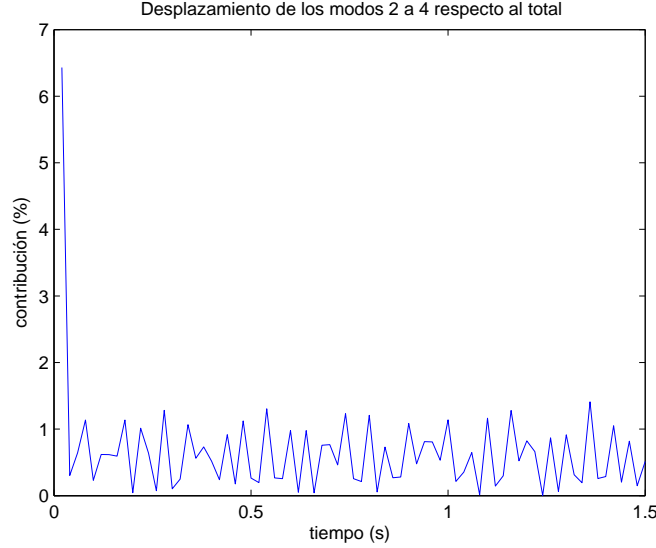


Figura 6.31: Contribución de los modos 2 a 4 al desplazamiento en  $x = L/2$

En los cálculos sucesivos para estas condiciones de contorno se considerará como en los problemas anteriores únicamente el primer término de la serie de Galerkin, es decir, se tomará  $N = 1$ .

### 6.4.4. Influencia de $H_0$

En las figuras 6.32 y 6.33 se muestra cómo influye el parámetro  $H_0$  en la capacidad de amortiguación de la viga, mostrando de nuevo que ésta puede crecer hasta valores del 100 % si se aumenta  $H_0$  lo suficiente ( $H_0 \simeq 5$ ).

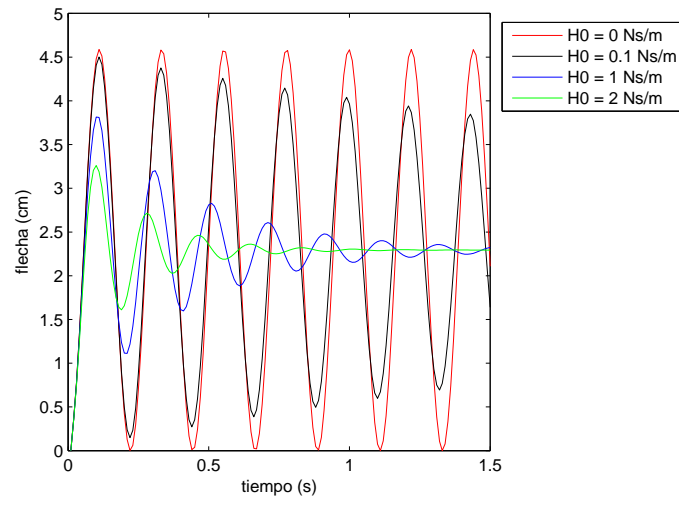


Figura 6.32: Desplazamiento del punto medio para distintos valores de  $H_0$

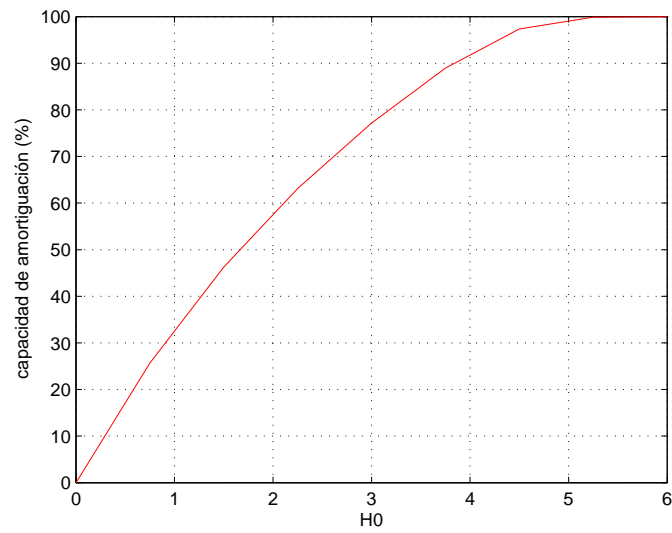


Figura 6.33: Capacidad de amortiguación  $\eta$  en función de  $H_0$

### 6.4.5. Influencia de $\mu$

De nuevo se ha resuelto el problema para distintos valores de  $\mu$ , obteniendo la tendencia mostrada en las figuras 6.34 y 6.35

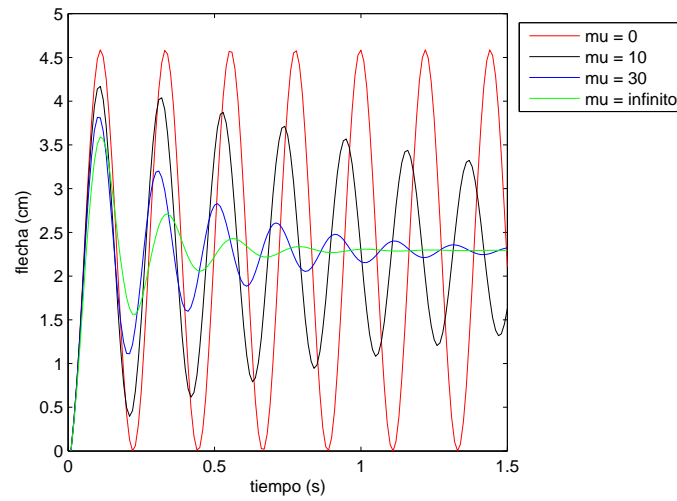


Figura 6.34: Desplazamiento del punto medio para distintos valores de  $\mu$

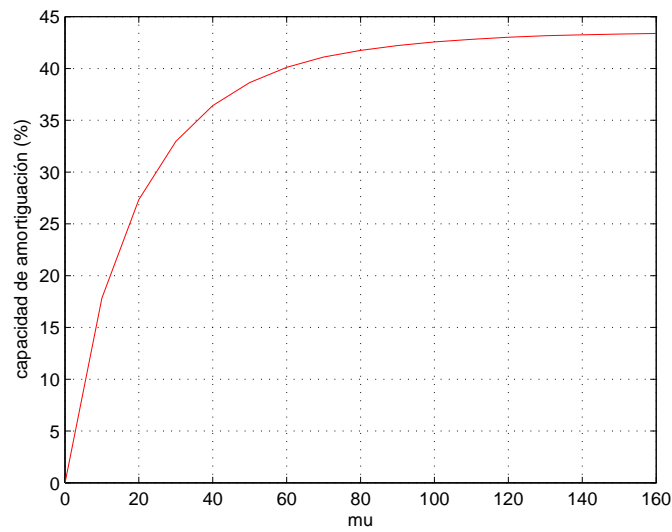


Figura 6.35: Capacidad de amortiguación  $\eta$  en función de  $\mu$

### 6.4.6. Influencia de $\alpha$

Observamos en las figuras 6.36 y 6.37 un comportamiento asintótico a medida que efecto amortiguador se hace más local, pudiendo llevar a amortiguamientos próximos

al 38 %.

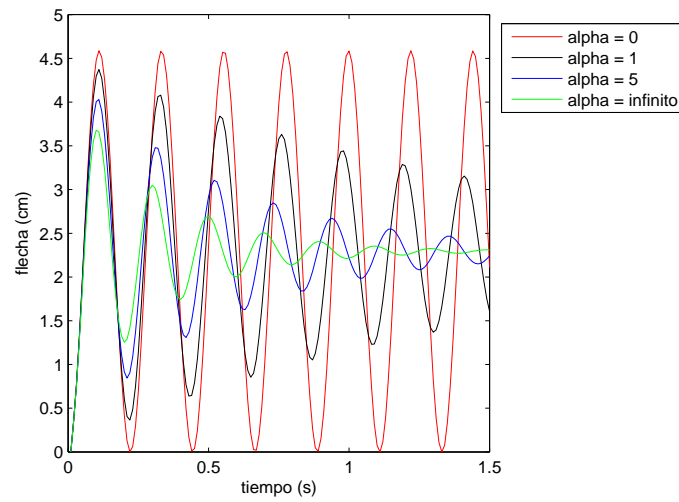


Figura 6.36: Desplazamiento del punto medio para distintos valores de  $\alpha$

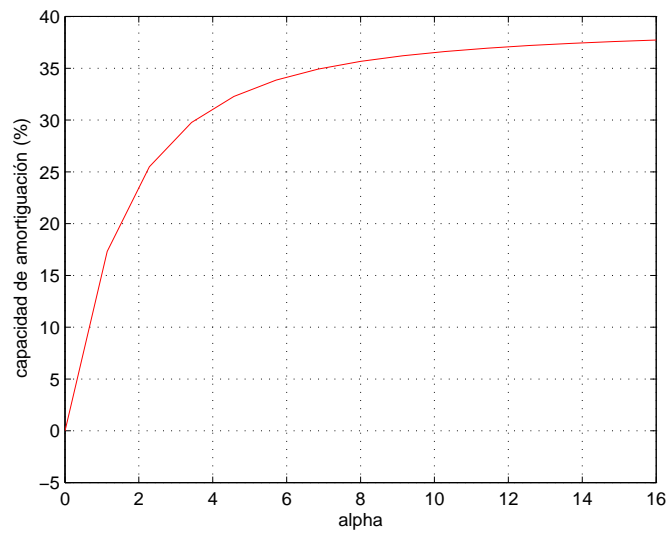


Figura 6.37: Capacidad de amortiguación  $\eta$  en función de  $\alpha$

#### 6.4.7. Influencia de $x_2 - x_1$ (región centrada)

De nuevo se refleja en las figuras 6.38 y 6.39 que un aumento en la longitud de la región amortiguada origina una mayor capacidad amortiguadora en la estructura.



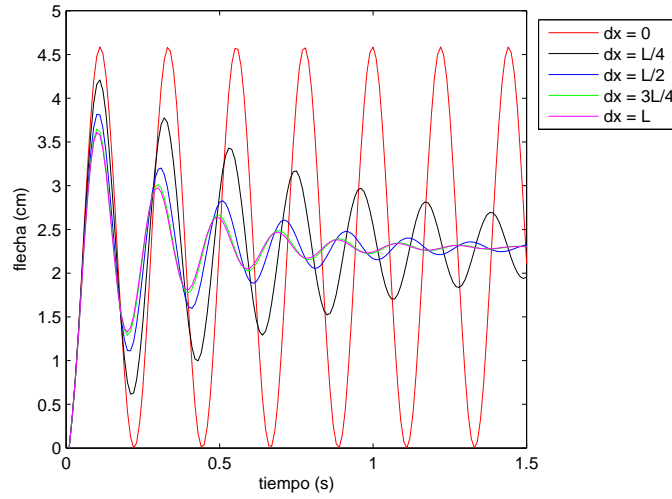


Figura 6.38: Desplazamiento del punto medio para distintos valores de  $\Delta x$  (región centrada en  $x = L/2$ )

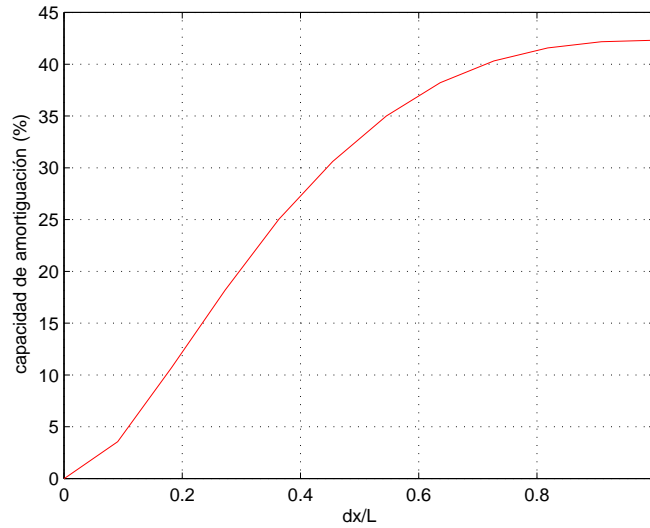


Figura 6.39: Capacidad de amortiguación  $\eta$  en función de  $\Delta x$  (región centrada en  $x = L/2$ )

#### 6.4.8. Influencia de $x_1$ ( $\Delta x = L/2$ )

La figura 6.40 refleja una diferencia muy importante respecto a las condiciones de contorno considerada anteriormente, y es el hecho de que la curva  $\eta - x_1$  tiene un máximo en  $x_1 \simeq 0,32L$ , debido a la asimetría en las condiciones de contorno. La capacidad amortiguadora es mayor si se sitúa el tratamiento más cerca del apoyo que si lo hace en las proximidades del empotramiento, ya que la flexibilidad es mayor en el primer caso que en segundo, por tanto se amortigua en una mayor proporción.

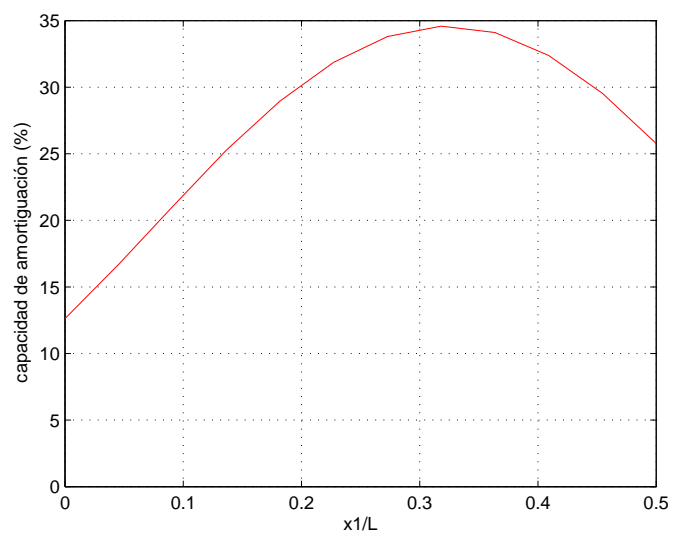


Figura 6.40: Capacidad de amortiguación  $\eta$  en función de  $x_1$  ( $\Delta x = L/2$ )

## 6.5. Caso 4: condiciones de contorno empotramiento-empotramiento

### 6.5.1. Modos propios no amortiguados

$$\phi_j(x) = A_j \cos \eta_j x + B_j \sin \eta_j x + C_j \cosh \eta_j x + D_j \sinh \eta_j x \quad ; \quad \eta_j^4 \equiv \frac{\rho A}{EI} \omega_j^2 \quad (6.45)$$

$$w(0, t) = w(L, t) = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial x}(0, t) = \frac{\partial w}{\partial x}(L, t) = 0 \quad (6.46)$$

Imponiendo que exista solución no nula, y normalizando la expresión, resulta:

$$\boxed{\phi_j(x) = \sqrt{\frac{1}{\rho A L}} [\cos \eta_j x - \cosh \eta_j x - \beta_j \sin \eta_j x + \beta_j \sinh \eta_j x]} \quad , \quad \boxed{\omega_j = \eta_j^2 \sqrt{\frac{EI}{\rho A}}} \quad (6.47)$$

donde:

$$\beta_j = \frac{\cos \eta_j L - \cosh \eta_j L}{\sin \eta_j L - \sinh \eta_j L} \quad (6.48)$$

y siendo  $\eta_j L$  las raíces de la siguiente ecuación:

$$\sin \eta_j L + \sinh \eta_j L + \beta_j (\cos \eta_j L - \cosh \eta_j L) = 0 \quad (6.49)$$

Se obtienen los siguientes cuatro primeros valores:

$$\begin{aligned} \eta_1 L = 4,730041 & \rightarrow \beta_1 = 0,982502214576238, \quad \omega_1 = 41,11 \\ \eta_2 L = 7,853205 & \rightarrow \beta_2 = 1,00077731190727, \quad \omega_2 = 113,31 \\ \eta_3 L = 10,995608 & \rightarrow \beta_3 = 0,999966450125409, \quad \omega_3 = 222,14 \end{aligned}$$

### 6.5.2. Resolución del problema estándar

El problema estándar para  $N = 3$  proporciona los resultados que se muestran a continuación.

Matrices de masa, rigidez y amortiguamiento:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (6.50)$$

$$K = \begin{pmatrix} 1689,8 & 0 & 0 \\ 0 & 12840 & 0 \\ 0 & 0 & 49346 \end{pmatrix} \quad (6.51)$$

$$C = \begin{pmatrix} 11,120 & 0 & -2,9056 \\ 0 & 5,0531 & 0 \\ -2,9056 & 0 & 2,4986 \end{pmatrix} \quad (6.52)$$

Autovalores:

Una vez que se han calculado las tres matrices anteriores, se obtienen las raíces del polinomio característico, esto es, los autovalores del problema, resultando los siguientes valores numéricos:

$$\lambda_{1,2} = -1,841286 \pm 43,8518 i$$

$$\lambda_{3,4} = -0,163921 \pm 113,9373 i$$

$$\lambda_{5,6} = -0,022440 \pm 222,3051 i$$

$$\lambda_7 = -26,3036$$

$$\lambda_8 = -29,6722$$

$$\lambda_9 = -29,9690$$

Aparecen, como era de esperar,  $2N$  autovalores complejos en pares conjugados, y  $N$  autovalores reales, todos ellos con parte real negativa.

Términos de la ecuación  $[D(s)] \cdot \{q(s)\} = \{f(s)\} + \{k(s)\}$ :

$$[D(s)] = s^2 [M] + sG(s) [C] + [K] \quad , \quad G(s) = \frac{30}{s + 30}$$

$$\{f(s)\} = \frac{1}{s} \cdot \begin{pmatrix} -4,5226 \\ 0 \\ -1,9801 \end{pmatrix} \quad , \quad \{k(s)\} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Flecha del punto medio en función del tiempo:

En la figura 6.41 se muestra el desplazamiento del punto medio de la viga en función del tiempo, obtenido de resolver el sistema anterior.

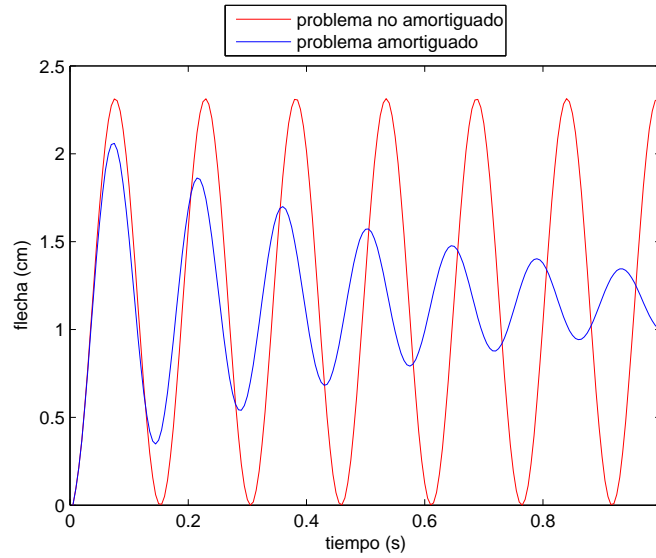


Figura 6.41: Desplazamiento del punto medio para la viga empotrada-libre estándar

Capacidad de amortiguación,  $\eta$ :

$$\eta \equiv 1 - \frac{w_{max} - w_{ref}}{w_{max}^* - w_{ref}} = \frac{0,0231334 - 0,020589}{0,023134 - 0,011569} = 0,2200 \equiv 22,00 \% \quad (6.53)$$

Se obtiene en este caso una capacidad de amortiguación menor que en todas las condiciones de contorno anteriores, debido a que la estructura es más rígida y está más restringida en los movimientos, hecho que disminuye el amortiguamiento del sistema.

### 6.5.3. Influencia de N

Se observa una vez más en la figura 6.42 que el modo 1 es predominante respecto a los demás, hecho que de nuevo prueba que **la capacidad de amortiguación  $\eta$  es la misma en todos los puntos de la viga.**

En los cálculos sucesivos para estas condiciones de contorno se considerará únicamente el primer término de la serie de Galerkin,  $N = 1$ .

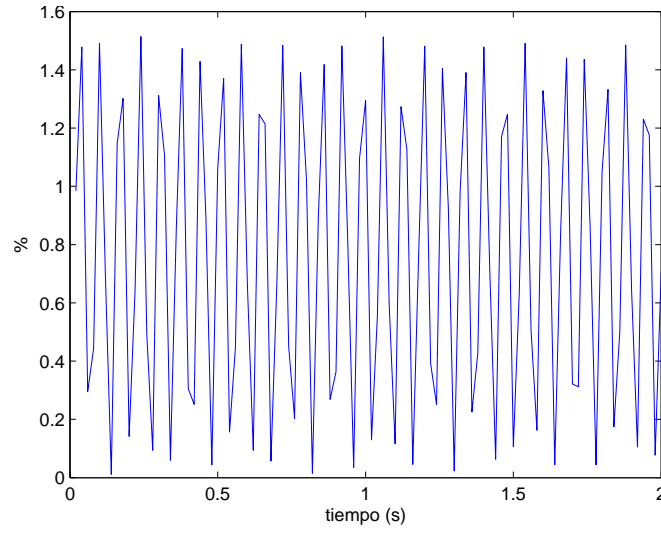


Figura 6.42: Contribución de los modos 2 y 3 al desplazamiento en  $x = L/2$

#### 6.5.4. Influencia de $H_0$

En las figuras 6.43 y 6.44 se puede apreciar cómo influye el parámetro  $H_0$  en la capacidad de amortiguación de la viga, mostrando de nuevo que ésta puede crecer hasta valores del 100 % si se aumenta  $H_0$  lo suficiente.

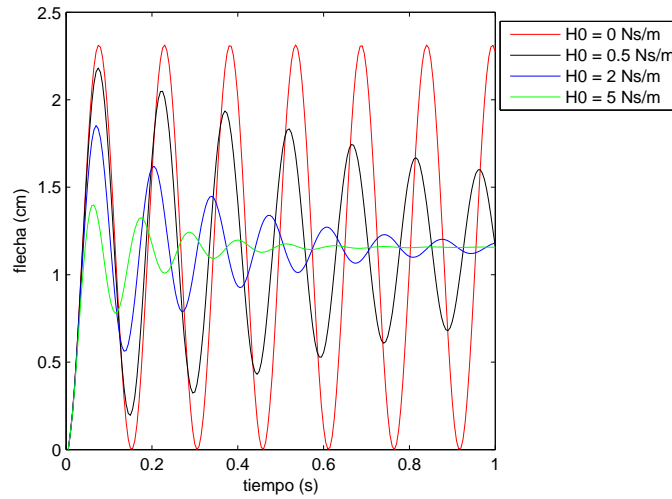


Figura 6.43: Desplazamiento del punto medio para distintos valores de  $H_0$

Se observa un amortiguamiento del 100 % para valores de  $H_0$  mayores que  $9 \text{ Ns}/m$ .

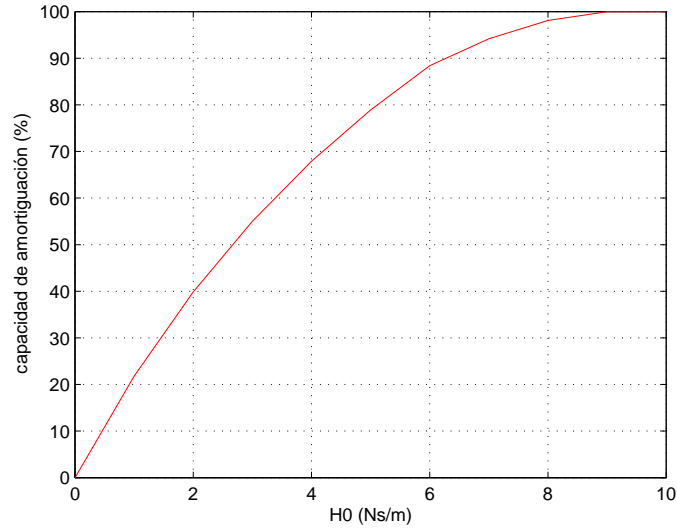


Figura 6.44: Capacidad de amortiguación  $\eta$  en función de  $H_0$

### 6.5.5. Influencia de $\mu$

Se muestra a continuación (figuras 6.45 y 6.46) la influencia de  $\mu$  en la solución obtenida para  $N = 1$ , encontrando una capacidad amortiguadora máxima del 35 % correspondiente al amortiguamiento viscoso asociado.

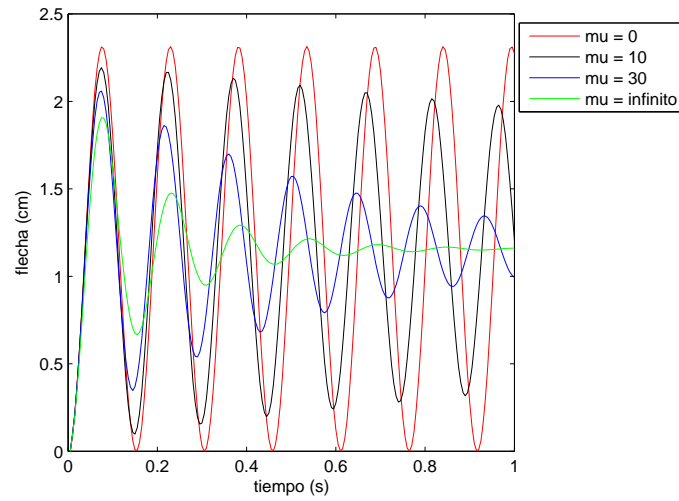


Figura 6.45: Desplazamiento del punto medio para distintos valores de  $\mu$

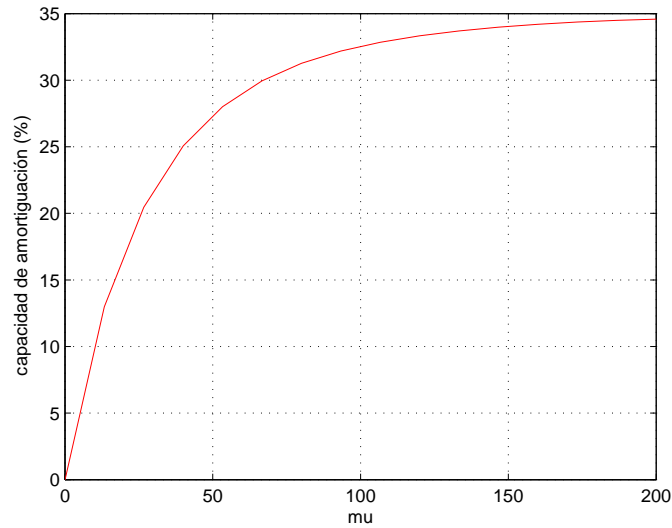


Figura 6.46: Capacidad de amortiguación  $\eta$  en función de  $\mu$

### 6.5.6. Influencia de $\alpha$

En los gráficos 6.47 y 6.48 se observan los desplazamientos obtenidos para distintos valores del parámetro, así como su influencia en la capacidad de amortiguación obtenida.

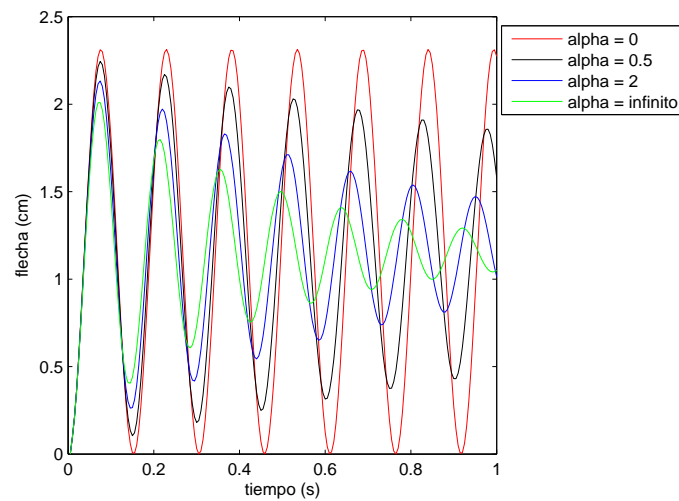


Figura 6.47: Desplazamiento del punto medio para distintos valores de  $\alpha$



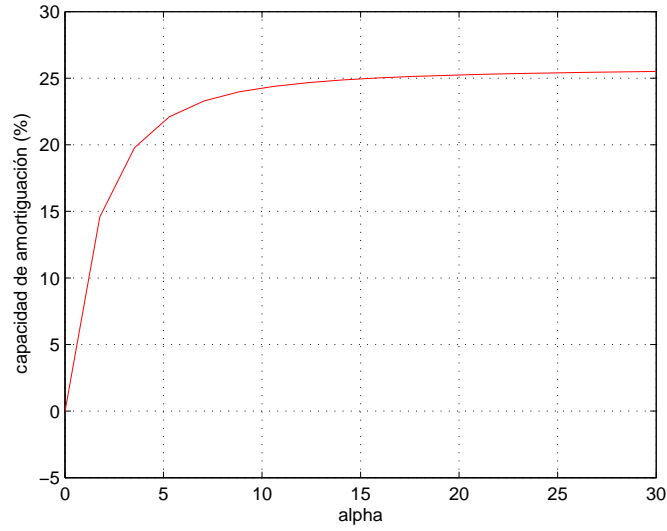


Figura 6.48: Capacidad de amortiguación  $\eta$  en función de  $\alpha$

### 6.5.7. Influencia de $x_2 - x_1$ (región centrada)

Observamos de nuevo en las figuras 6.49 y 6.50 que un aumento de  $\Delta x$  produce una mayor capacidad de amortiguación en la estructura biempotrada estándar que se está analizando.

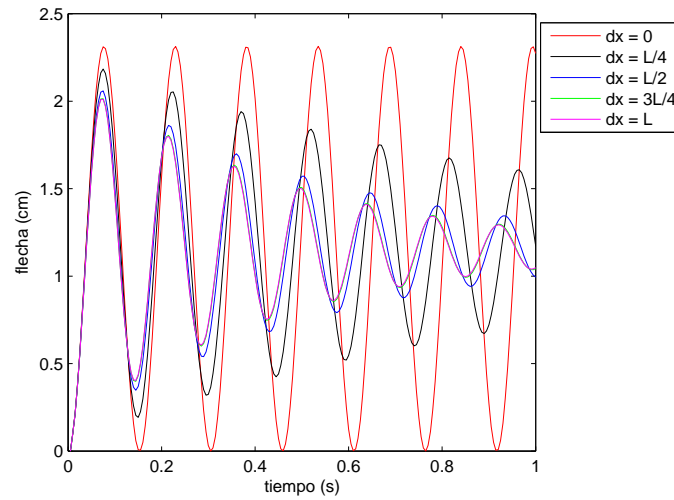


Figura 6.49: Desplazamiento del punto medio para distintos valores de  $\Delta x$  (región centrada en  $x = L/2$ )

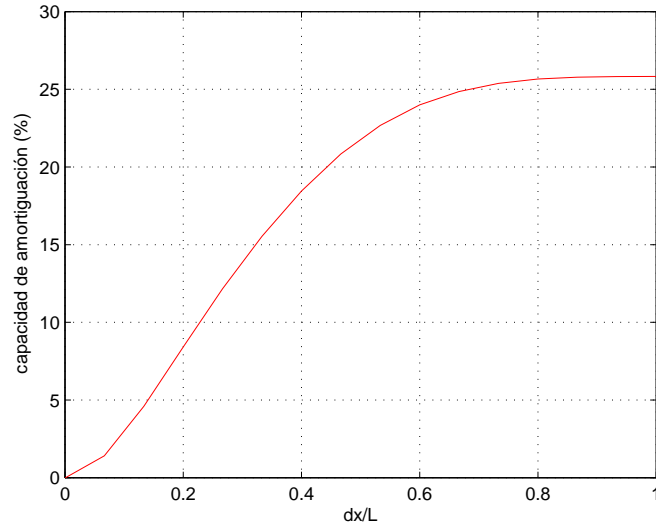


Figura 6.50: Capacidad de amortiguación  $\eta$  en función de  $\Delta x$  (región centrada en  $x = L/2$ )

### 6.5.8. Influencia de $x_1$ ( $\Delta x = L/2$ )

La posición del tratamiento amortiguador proporciona una capacidad de amortiguación como la mostrada en las figuras 6.51 y 6.52.

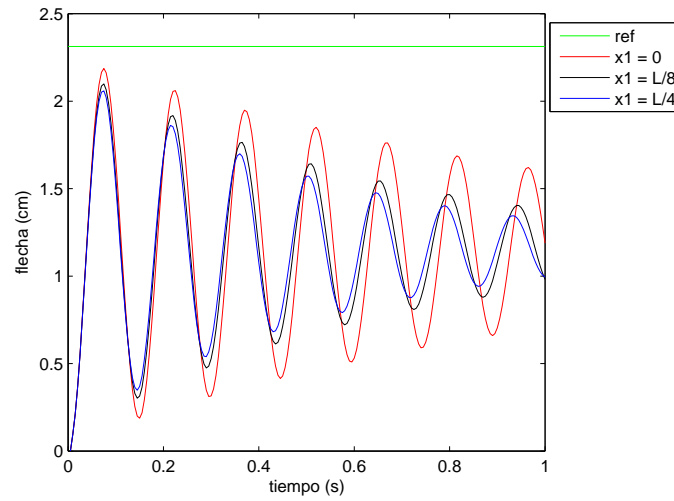


Figura 6.51: Desplazamiento del punto medio para distintos valores de  $x_1$  ( $\Delta x = L/2$ )

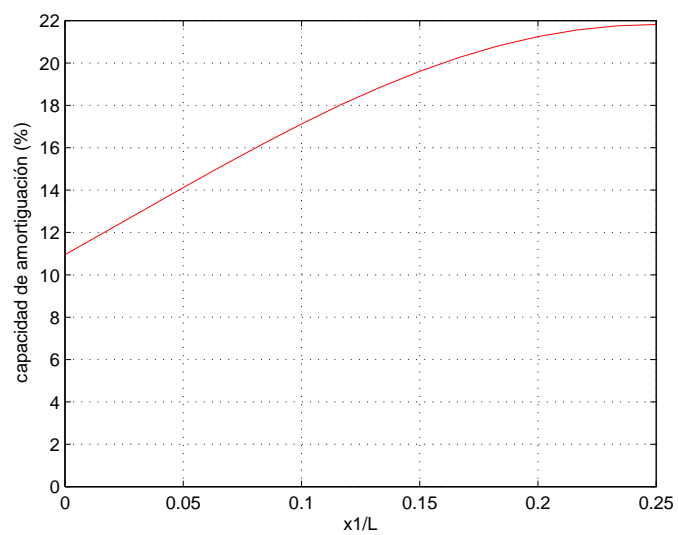


Figura 6.52: Capacidad de amortiguación  $\eta$  en función de  $x_1$  ( $\Delta x = L/2$ )

## 6.6. Comparativa de resultados

Una vez que se ha analizado en detalle la influencia de todos los parámetros que intervienen en el sistema, es interesante realizar una comparativa de los resultados obtenidos, comentando las diferencias más significativas encontradas entre las diferentes condiciones de contorno que han sido consideradas en el presente estudio.

En todos los casos, se ha concluido que el primer término de la serie de desplazamientos es el predominante, y se ha demostrado que este hecho implica que la capacidad de amortiguación es independiente del punto geométrico donde se calcule, pudiéndose por tanto extrapolar los resultados obtenidos en  $x = L/2$  al resto de puntos de la viga contenidos en la región amortiguada.

Para la condición de contorno apoyo-apoyo se han graficado los desplazamientos obtenidos en el punto medio de la viga considerando cada una de las funciones de Kernel espaciales descritas previamente en capítulos anteriores. Se ha encontrado que todas ellas muestran resultados similares para una correcta elección de los parámetros  $\alpha$  y  $l_0$ . Por este motivo, se ha tenido en cuenta únicamente el modelo de decrecimiento exponencial en todos los cálculos posteriores, ya que los demás modelos no aportan conclusiones adicionales al problema.

Posteriormente, se ha resuelto el problema estándar variando de manera independiente cada uno de los parámetros del sistema, graficando el valor de  $\eta$  obtenido en cada caso. En las figuras que se muestran a continuación se describe un resumen de los resultados obtenidos para cada una de las condiciones de contorno consideradas.

### Comportamiento amortiguador: $H_0$ , $\mu$ y $\alpha$

Las figuras 6.53, 6.54 y 6.55 muestran una recopilación de los resultados obtenidos.

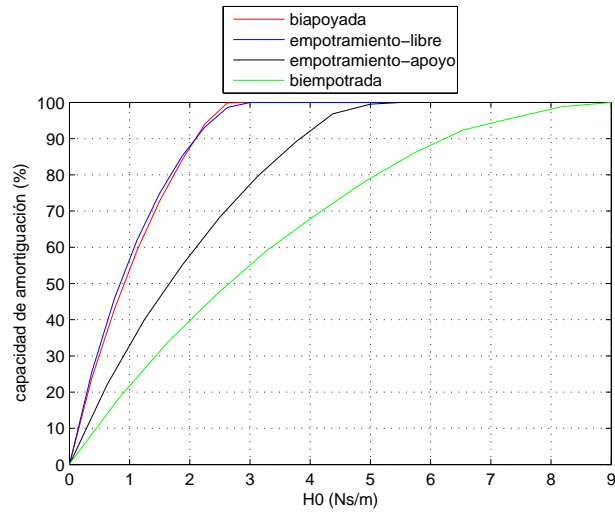


Figura 6.53: Capacidad de amortiguación  $\eta$  en función de  $H_0$  (resto de parámetros: valores estándar)

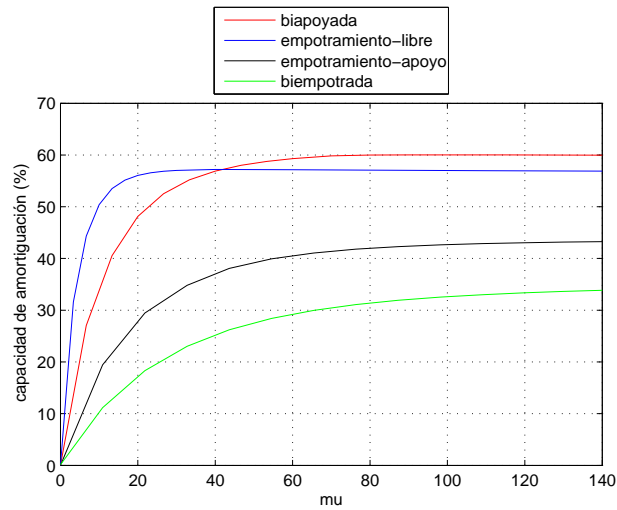


Figura 6.54: Capacidad de amortiguación  $\eta$  en función de  $\mu$  (resto de parámetros: valores estándar)

Se observan similitudes en las dos primeras condiciones de contorno, esto es, viga biapoyada y viga en voladizo, encontrando valores de  $\eta$  muy parecidos en ambos casos

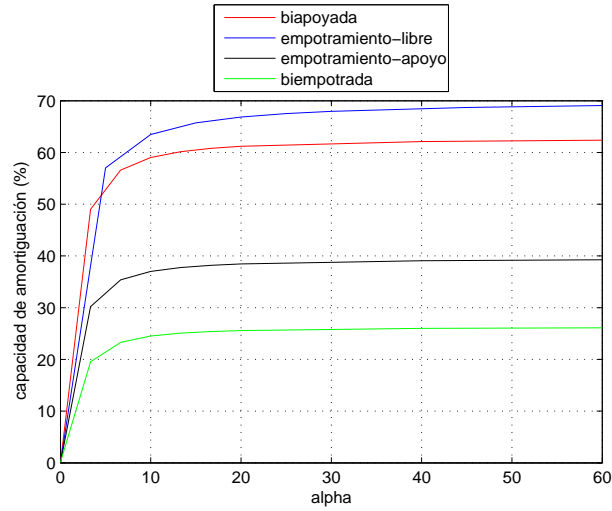


Figura 6.55: Capacidad de amortiguación  $\eta$  en función de  $\alpha$  (resto de parámetros: valores estándar)

respecto a los parámetros relativos al comportamiento amortiguador, en definitiva, la función de Kernel  $C_e(x, \xi, t - \tau)$  que engloba los efectos de la histéresis temporal y del aspecto no local del problema. Sin embargo, en los otros casos la magnitud del parámetro  $\eta$  es menor, encontrando las menores amortiguaciones para la viga biempotrada. Se concluye por tanto que **las vigas con mayor grado de hiper-estatismo proporcionan menores capacidades de amortiguación  $\eta$** , debido a que los movimientos están más restringidos y por tanto la capacidad de actuación del tratamiento amortiguador es menor, .absorbida.<sup>en</sup> parte por dichas restricciones al movimiento.

#### Posición y tamaño de la zona amortiguada: $\Delta x$ y $x_1$

Las figuras 6.56 y 6.57 representan la influencia de estos dos parámetros en la capacidad amortiguadora de la viga en cada caso.

En primer lugar, se observa en la figura 6.56 que para cada tipo de condición de contorno considerada, la capacidad de amortiguación aumenta cuanto mayor es el tamaño de la zona amortiguadora, es decir,  $\Delta x$ . Si se compara cada caso, se puede ver que las diferencias que aparecen entre cada tipo de viga se hacen más importantes a medida que aumentamos este parámetro, encontrando la mayor pendiente para el caso de viga en voladizo.

La figura 6.57 muestra claramente en los cuatro casos que el parámetro  $\eta$  es mayor si se sitúa la región amortiguada lo más próxima posible a los puntos de la viga con mayores desplazamientos transversales, por tanto es importante conocer la deformada en modo estático para predecir la mejor posición para el tratamiento amortiguador.

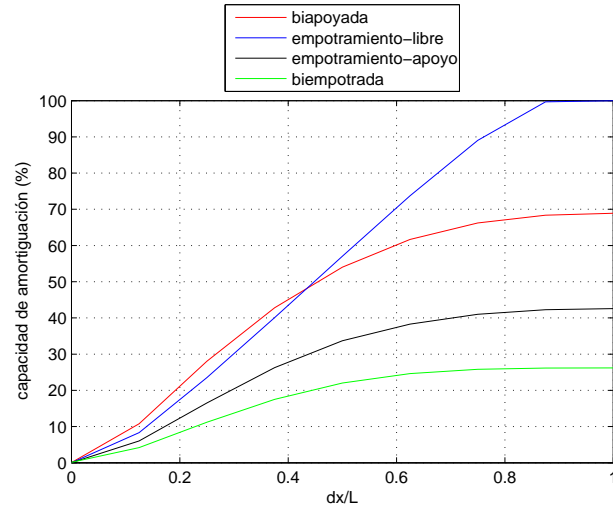


Figura 6.56: Capacidad de amortiguación  $\eta$  en función de  $\Delta x$  (resto de parámetros: valores estándar)

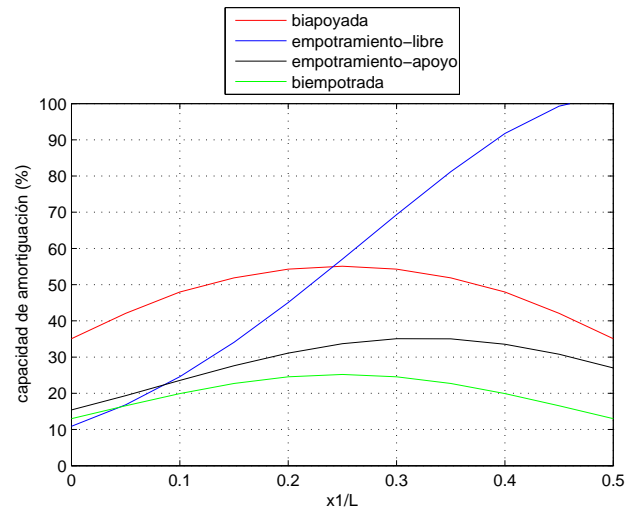


Figura 6.57: Capacidad de amortiguación  $\eta$  en función de  $x_1$  (resto de parámetros: valores estándar)

# Capítulo 7

## Conclusiones

En este estudio se ha resuelto de manera satisfactoria la ecuación de movimiento de una viga con un tratamiento amortiguador viscoelástico no local, analizando la influencia de los distintos parámetros que intervienen en el problema, y para lo cual se ha utilizado el **Método de Galerkin** apoyado en el concepto de **Transformada de Laplace**. También se han desarrollado otros métodos alternativos de resolución, con el único objetivo de mostrar su existencia aplicabilidad a nuestro problema y a otros del entorno ingenieril.

En el Capítulo 1 se han expuesto las principales características de los materiales viscoelásticos y se han descrito los modelos más utilizados para describir su comportamiento, mientras que en el Capítulo 2 se han sentado las bases de la dinámica de vigas tipo Euler-Bernoulli, sin considerar ningún tratamiento amortiguador, y resolviendo analíticamente la ecuación de movimiento para este caso.

En los apartados siguientes se ha introducido un nuevo término en la ecuación de movimiento anterior, contemplando así el comportamiento de una viga con un tratamiento amortiguador en un tramo  $\Delta x$  de su longitud. Este nuevo término incluye dos amortiguamientos, el externo y el interno, conteniendo cada uno de ellos diversas funciones espaciales y temporales que es necesario modelizar. Por simplicidad, no se ha considerado amortiguamiento interno a la hora de resolver los diferentes casos prácticos planteados.

Para analizar la influencia de los parámetros del problema, se han utilizado valores estándar de referencia de los mismos, analizando la sensibilidad de la solución frente a la variación de los mismos, y partiendo en todos los casos de los mismos valores de referencia. Por simplicidad, se han considerado únicamente el punto geométrico  $x = L/2$  y una fuerza unitaria  $F(x, t) = 1 \text{ N/m}$ , con el fin de poner obtener resultados comparables entre sí de una manera clara. Asimismo, se han resuelto diferentes condiciones de contorno, con el fin de analizar cómo influye el tratamiento amortiguador en todas ellas de manera independiente.



Se ha definido un parámetro  $\eta$  denominado *capacidad de amortiguación*, que da una idea del nivel amortiguador conseguido en cada caso, y que permite realizar comparaciones de resultados de manera sencilla. Se ha demostrado además, que el hecho de que el primer término del desarrollo en serie de Galerkin sea predominante respecto al resto, implica una capacidad de amortiguación que no varía de un punto a otro de la viga, o lo que es lo mismo, **es suficiente con analizar el punto  $x = L/2$  y extrapolar a los demás los resultados obtenidos.**

Para la función de Kernel espacial,  $c(x - \xi)$ , se han contemplado 4 modelos distintos, concluyendo, tras resolver los casos prácticos de la viga biapoyada considerada, que una correcta elección de los parámetros que intervienen en sus expresiones,  $\alpha$  y  $l_0$ , proporcionan resultados similares en la solución final. Por este motivo, se han resuelto todas las condiciones de contorno utilizando únicamente el modelo de decrecimiento exponencial, llegando a conclusiones claras sobre cómo influye el parámetro  $\alpha$  en los resultados finales obtenidos. A este respecto, se ha concluido que el mayor amortiguamiento conseguido corresponde al modelo de amortiguamiento local, correspondiente a valores muy altos de este parámetro, y teniendo en cuenta la posición centrada del tratamiento en  $x = L/2$ .

La función de relajación  $g(t - \tau)$  también acepta diferentes modelos en su expresión, entre los cuales se ha considerado la expresión más sencilla correspondiente a un decrecimiento exponencial. Se ha analizado la variación del amortiguamiento conseguido en función del parámetro  $\mu$ , obteniendo, como era de esperar, un mayor amortiguamiento para valores altos de este parámetro, ya que el comportamiento está más alejado del perfectamente elástico y más próximo al viscoso.

Respecto al parámetro  $H_0$ , se ha concluido que un incremento en su valor produce un mayor amortiguamiento, no obstante, el efecto es distinto dependiendo de las condiciones de contorno consideradas en cada caso.

Asimismo, se ha analizado cómo influyen  $\Delta x$  y  $x_1$  en cada problema particular, y se han obtenido conclusiones muy precisas sobre la influencia del tamaño de la región amortiguadora y sobre la posición más adecuada de ésta, concluyendo que interesa situarla lo más cercana posible a la región de la viga que sufra mayores desplazamientos transversales.

En un último análisis, se han comparado los resultados obtenidos para las distintas condiciones de contorno consideradas, obteniendo una información gran valor ingenieril que permite diseñar de manera óptima el tratamiento amortiguador más adecuado para cada viga y para cada caso en particular.

# Líneas futuras de investigación

El presente estudio ha sentado un procedimiento de análisis a la hora de resolver la ecuación de movimiento de una viga con amortiguamiento viscoelástico no local, no obstante, se han realizado simplificaciones con el fin de obtener unos resultados claros y fáciles de discutir. De esta manera se ha conseguido extraer información muy útil acerca de cómo influyen los parámetros del problema en la solución final obtenida, conclusiones a las que habría sido más difícil llegar si se hubiese resuelto el caso más general posible. Desde este punto de vista, un trabajo futuro podría contemplar la existencia del **término de amortiguamiento interno**, analizando en detalle la influencia de la función  $\gamma(x)$  en los resultados obtenidos, y considerando a su vez **expresiones más generales para  $F(x,t)$** .

Asimismo, sería muy interesante realizar una **programación de Elementos Finitos** mediante la cual se pudieran resolver estructuras formadas por múltiples vigas unidas, que considerara los modelos de amortiguamiento viscoelástico no local a la hora de relacionar las fuerzas con los desplazamientos absolutos en cada uno de los nodos de las vigas.

Se ha analizado la influencia de los distintos parámetros partiendo de unos valores estándar de referencia de los mismos, analizando su influencia variando únicamente uno de ellos cada vez. Sería de gran utilidad analizar también cómo varía la capacidad de amortiguación si se cambian al mismo tiempo dos o más de estos parámetros.

Finalmente, se propone una línea de investigación que analice la influencia de los parámetros geométricos y del material, esto es,  $\rho A$ ,  $EI$  y  $L$ , ya que por simplicidad no se ha considerado este hecho en el presente estudio.

# Bibliografía

***A Galerkin method for distributed systems with non-local damping.*** Y.Lei, M.I.Friswell, S.Adhikari. *International Journal of Solids and Structures* 43 (2006).

***Dynamics of non-viscously damped distributed parameter systems.*** S.Adhikari, Y.Lei, M.I.Friswell. Department of Aerospace Engineering, University of Bristol, Bristol, U.K., April 2005.

***On the eigenvalues optimizations of beams with auxetic patches.*** Veturia CHIROIU, Ligia MUNTEANU, Ana María MITU, Carmen ELSINGER BORCEA. *SISOM 2008 and Session of the Commission of Acoustics, Bucharest 29-30 may 2008.*

***Damping models for structural vibration.*** S.Adhikari (PhD Thesis), Cambridge University Engineering Department. September 2000.

***Linear system identification using proper orthogonal decomposition.*** Mohammad Khalil, Sondipon Adhikari, Abhijit Sarkar. *Mechanical Systems and Signal Processing* 21 (2007).

***Non-local finite element analysis of damped beams.*** M.I.Friswell, S.Adhikari, Y.Lei. *International Journal of Solids and Structures* 44 (2007).

***Damping modelling using generalized proportional damping.*** S.Adhikari. *Journal of Sound and Vibration* 293 (2006).

***Direct time-domain integration method for exponentially damped linear systems.*** S.Adhikari, N.Wagner. *Computers and Structures* 82 (2004).

***Identification of damping: Part 1, viscous damping.*** S.Adhikari, J.Woodhouse. *Journal of Sound and Vibration* (2001).

***Identification of damping: Part 2, non-viscous damping.*** S.Adhikari, J.Woodhouse. *Journal of Sound and Vibration* (2001).

***Identification of damping: Part 3, symmetry-preserving methods.*** S.Adhikari, J.Woodhouse. *Journal of Sound and Vibration* (2002).

*Identification of damping: Part 4, error analysis.* S.Adhikari, J.Woodhouse. *Journal of Sound and Vibration* (2002).

*Linear damping models for structural vibration.* J.Woodhouse. *Journal of Sound and Vibration* (1998).

*On the quantification of damping model uncertainty.* S.Adhikari. *Journal of Sound and Vibration* 306 (2007).

*Optimal complex models and an index of damping non-proportionality.* S.Adhikari. *Mechanical Systems and Signal Processing* 18 (2004).

*Quantification of non-viscous damping in discrete linear systems.* S.Adhikari, J.Woodhouse. *Journal of Sound and Vibration* 260 (2003).

*On the interaction of exponential non-viscous damping with symmetric nonlinearities.* J.Sieber, D.J.Wagg, S.Adhikari. *Journal of Sound and Vibration* 314 (2008).

*Viscous damping identification in linear vibration.* A.Srikantha Phani, J.Woodhouse. *Journal of Sound and Vibration* 303 (2007).

*Comportamiento viscoelástico lineal de vigas curvas anisótropas deformables por corte.* Marcelo T.Piovan, Víctor H.Cortínez. *Mecánica Computacional Vol. XXI*, pp.1750-1769. October 2002.

*Geometrically-linear and nonlinear analysis of linear viscoelastic composites using the finite element method.* Daniel C.Hammerand (PhD Thesis). August 1999.

*The Laplace Transform, Theory and Applications.* Joel L.Schiff. Springer-Verlag New York, Inc. 1999.

Apuntes del **Máster en Mecánica Estructural Avanzada**. Universidad Carlos III de Madrid. Curso académico 2007-08.

Apuntes de las asignaturas **Comportamiento en Servicio de Materiales, Simulación de Flujos Industriales por Ordenador y Mecánica de Sólidos**, pertenecientes al plan de estudios de Ingeniería Industrial. Curso Académico 2008-09.